JUBILÄUMSBAND II

AUS ANLASS DES 100 JÄHRIGEN BESTEHENS

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Hasse, Schaefer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 158.

In vier Heften.

Mit 16 Bildern auf 4 Tafeln.

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1927.

General
Harr.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 158.

Hasse, Helmut, Über das Reziprozitätsgesetz der *m*-ten Potenzreste . . . Seite 228
Haupt, Otto. Zur Erzeugung der Primfunktion von *Prym* und *Rost* . . . — 56
Hausdorff, F., *Lipschitz*sche Zahlensysteme und *Study*sche Nablafunktionen — 113
Haußner, Robert, Untersuchungen über Lückenzahlen und den *Goldbach*schen Satz . . . . . — 172
Hensel, Kurt, Über eindeutige Zerlegung in Primelemente . . . . . — 194
Kneser, Adolf, Neue Untersuchung einer Reihe aus der Theorie der elliptischen Funktionen . . . . . — 209
Lichtenstein, Leon, Zur Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus . . . . . — 80
Liebmann, Heinrich, Bestimmung der geodätisch-rhombischen Netze bei konstantem Krümmungsmaß . . . . . — 49
Plessner, A., Über das Verhalten analytischer Funktionen am Rande ihres Definitionsbereichs . . . . . — 219
Pólya, G., Über trigonometrische Integrale mit nur reellen Nullstellen . . — 6
Rella, Tonio, Ordnungsbestimmungen in Integritätsbereichen und Newtonsche Polygone . . . . . — 33
Schlesinger, Ludwig, Über Randwerte von Funktionen einer komplexen Veränderlichen . . . . . — 1
Schmeidler, Werner, Über adjungierte Polynome bei irreduziblen algebraischen Gebilden beliebiger Mannigfaltigkeit . . . . . — 19
Schottky, Friedrich, Über die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen, denen die sechs hyperelliptischen Quotienten $\frac{\sigma_{\alpha\beta}(u, v)}{\sigma(u, v)}$ $(\alpha, \beta = \underset{\alpha \leqq \beta}{1, 2, 3, 4})$ genügen . . . . . — 92
Schur, J., Über die reellen Kollineationsgruppen, die der symmetrischen oder der alternierenden Gruppe isomorph sind . . . . . — 63
Sommerfeld, A., Asymptotische Darstellung von Formeln aus der Beugungstheorie des Lichtes . . . . . — 199
Steinitz, Ernst, Über isoperimetrische Probleme bei konvexen Polyedern . . — 129
Tietze, Heinrich, Über konvexe Figuren . . . . . — 168
Wirtinger, Wilhelm, Über den Weierstrass'schen Vorbereitungssatz . . . — 260
Zermelo, E., Über das Maß und die Diskrepanz von Punktmengen . . . — 154

Ausgabedaten der Hefte von Band 158.

Heft 1 ausgegeben am 29. Juli 1927
Heft 2 ausgegeben am 14. Oktober 1927
Heft 3 ausgegeben am 8. Dezember 1927
Heft 4 ausgegeben am 30. Dezember 1927

JUBILÄUMSBAND II
AUS ANLASS DES 100 JÄHRIGEN BESTEHENS

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Hasse, Schaefer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 158.

Heft 1.

Mit Bildern von Abel, Jacobi, Dirichlet und Graßmann.

Ausgegeben den 29. Juli

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG, VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1927

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 158. Heft 1.

(Jubiläumsband II.)

Mit Bildern von Abel, Jacobi, Dirichlet und Graßmann.

Inhaltsverzeichnis.

Schlesinger, Ludwig, Über Randwerte von Funktionen einer komplexen Veränderlichen . . . . . Seite 1

Pólya, G., Über trigonometrische Integrale mit nur reellen Nullstellen . . . — 6

Schmeidler, Werner, Über adjungierte Polynome bei irreduziblen algebraischen Gebilden beliebiger Mannigfaltigkeit . . . . . — 19

Rella, Tonio, Ordnungsbestimmungen in Integritätsbereichen und Newtonsche Polygone . . . . . — 33

Liebmann, Heinrich, Bestimmung der geodätisch-rhombischen Netze bei konstantem Krümmungsmaß . . . . . — 49

Haupt, Otto, Zur Erzeugung der Primfunktion von *Prym* und *Rost* . . . . — 56

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Niels Henrik Abel
geb. 5. August 1802, gest. 6. April 1829
(Acta mathematica 1882—1912, Table générale des Tomes 1—35).

Carl Gustav Jacob Jacobi
geb. 10. December 1804, gest. 18. Februar 1851.

Peter Gustav Lejeune Dirichlet
geb. 13. Februar 1805, gest. 5. Mai 1859.

Hermann Günther Graßmann
geb. 15. April 1809, gest. 26. September 1877.

Band 158. Heft 1.

(Jubiläumsband II.)

Mit Bildern von Abel, Jacobi, Dirichlet und Graßmann.

Inhaltsverzeichnis.

[illegible]lesinger, Ludwig, Über Randwerte von Funktionen einer komplexen Veränderlichen . . . . . Seite 1

[illegible]dya, G., Über trigonometrische Integrale mit nur reellen Nullstellen . . . — 6

[illegible]hmeidler, Werner, Über adjungierte Polynome bei irreduziblen algebraischen Gebilden beliebiger Mannigfaltigkeit . . . . . — 19

[illegible]lla, Tonio, Ordnungsbestimmungen in Integritätsbereichen und Newtonsche Polygone . . . . . — 33

[illegible]bmann, Heinrich, Bestimmung der geodätisch-rhombischen Netze bei konstantem Krümmungsmaß . . . . . — 49

[illegible]upt, Otto, Zur Erzeugung der Primfunktion von *Prym* und *Sim* . . . — 56

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

[illegible]ndungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Niels Henrik Abel
geb. 5. August 1802, gest. 6. April 1829
(aus Acta mathematica 1882—1912, Table générale des Tomes 1—35).

Carl Gustav Jacob Jacobi
geb. 10. Dezember 1804, gest. 18. Februar 1851.

Peter Gustav Lejeune Dirichlet
geb. 13. Februar 1805, gest. 5. Mai 1859.

Hermann Günther Graßmann
geb. 15. April 1809, gest. 26. September 1877.

Über Randwerte von Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Von *Ludwig Schlesinger* in Gießen.

In der Ebene der komplexen Variablen $v = \xi + \eta i$ sei durch das Funktionenpaar $\xi = \xi(s)$; $\eta = \eta(s)$ eine ganz im Endlichen verlaufende geschlossene und rektifizierbare Jordankurve C gegeben, wo s die von einem bestimmten Anfangspunkte aus gezählte Bogenlänge bedeutet. Die Funktionen $\xi(s)$ und $\eta(s)$ haben dann beschränkte Differenzenquotienten und sind demnach total (absolut) stetig. Ferner sei $f(v) = f(\xi(s) + i\,\eta(s))$ eine auf C definierte beschränkte und meßbare Funktion von s. Das über C im positiven Sinne hin erstreckte *Lebesgue*sche Integral

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(v)\,dv}{v-u} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi(s)+i\,\eta(s))\,(\xi'(s)+\eta'(s)\,i)\,ds}{\xi(s)+i\,\eta(s)-u}$$

stellt dann für $u < C$, d. h. für die innerhalb C gelegenen komplexen Werte von u eine holomorphe Innenfunktion $F_i(u)$, und ebenso für $u > C$ eine für $u = \infty$ verschwindende holomorphe Außenfunktion $F_a(u)$ dar. Wir wollen die folgenden in der Literatur schon vielfach behandelten Fragen erörtern [1]):

1. Existieren die Randfunktionen

$$\lim_{u\to C} F_i(u) = \overline{F}_i, \qquad \lim_{u\to C} \overline{F}_a(u) = F_a\ ?$$

---

[1]) *Ch. Hermite*, dieses Journal 91, 1881, S. 54; Oeuvres IV, 1917, S. 48.
—, Cours (autographiert) 4. éd., 1891, S. 79, S. 154 ff.
F. Casorati, Annali di Matematica, (2) 15, 1887, S. 223.
—, „ „ „ (2) 16, 1888, S. 1.
M. Hamburger, Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft, 2, 1903, S. 17.
P. Fatou, Acta Mathematica 30, 1906, S. 364 ff.
J. Plemelj, Monatshefte der Mathematik und Physik, 19, 1908, S. 205.
D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen, Leipzig 1912, 3. Abschnitt, S. 81 ff.
G. D. Birkhoff, Proceedings of the American Academy of Arts and Science, 49, 1913, S. 521.
F. und *M. Rieß*, Comptes rendus du quatrième congrès des Mathématiciens scandinaves, Uppsala 1920, S. 27.
A. Pleßner, Mitteilungen des Mathematischen Seminars der Univ. Gießen, Heft 10, 1922.
W. J. Priwaloff, Journal de l'Ecole Polytechnique, II. série, cah. 24, 1924, S. 77, besonders S. 96 ff.

2. Welche Beziehung besteht zwischen diesen Randfunktionen und $f(v)$?

Es soll versucht werden, diesen Fragen dadurch eine neue Seite abzugewinnen, daß sie mit der *Fejér*schen Summationstheorie der *Fourier*schen Reihen in Beziehung gebracht werden; im übrigen fügen sich die folgenden Bemerkungen den Vorarbeiten ein, die erforderlich erscheinen, um eine Problemstellung in Angriff nehmen zu können, über die an anderer Stelle berichtet worden ist [1]).

Die homöometrische (gegenseitig eindeutige und konforme) Abbildung des von C begrenzten Innengebietes $u < C$ auf das Kreisinnere $|z| < 1$ einer z-Ebene werde durch die Funktion $z = g(u)$ vermittelt. Es gilt also für $u < C$

$$|g(u)| < 1, \quad g'(u) \neq 0, \quad g(u) \neq g(v) \text{ für } u \neq v .$$

Dann ist nach *Osgood* und *Caratheodory* [2]), wenn u in einen Punkt v von C einrückt, $|g(v)| = 1$ und die Beziehung zwischen den Punkten von C und denen des Einheitskreises $|z| = 1$ ist auch eine gegenseitig eindeutige. Bedeutet nun $F(u)$ eine für $u < C$ und auf C selbst holomorphe Funktion, so sieht man sofort [3]), daß

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(v)\,dv}{v-u} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(v)\,dg(v)}{g(v)-g(u)}$$

gilt; wir wollen darum für unsere Randfunktion $f(v)$ statt des Integrals (1) das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(v)\,dg(v)}{g(v)-g(u)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{f(t)\,dt}{t-z} \tag{2}$$

zugrunde legen, wo jetzt $f(t)$ die vermöge $t = g(v)$ auf die Kreisperipherie $|t| = 1$ übertragene Funktion $f(v)$ bedeuten soll. Setzen wir nämlich $t = e^{\alpha i}$, $z = re^{\beta i}$ und schreiben für $f(e^{\alpha i})$ wieder $f(\alpha)$, so ist diese Funktion von α für $-\pi \leqq \alpha < +\pi$ ebenfalls beschränkt und meßbar. Die Meßbarkeit der übertragenen Funktion folgt aus dem bekannten Satze [4]), daß einer Punktmenge vom Maße Null auf C stets eine Punktmenge vom Maße Null auf dem Kreise entspricht und umgekehrt.

Das durch die angegebene Transformation auf den Einheitskreis übertragene Integral (2) nimmt dann die Form an:

---

[1]) Acta Mathematica 49, 1926, S. 191.

[2]) Vergl. Encyklopädie der mathem. Wissenschaften II, 3, I, 1909—1921, S. 366 (Artikel *Lichtenstein*).

[3]) Vergl. *L. Koenigsberger,* Vorlesungen über elliptische Funktionen I, 1874, S. 94/95.
M. Hamburger, a. a. O. S. 21.

Die für die Geltung der folgenden Gleichung des Textes erforderliche totale (absolute) Stetigkeit der Funktion $g(v)$ auf C ergibt sich aus dem weiter unten (im Text) angeführten Satze von *Rieß* und *Priwaloff*.

[4]) Diesen Satz haben unabhängig voneinander und etwa gleichzeitig bekannt gemacht: *F.* u. *M. Rieß*, a. a. O. und *W. J. Priwaloff*, in seiner 1918 in Saratow in russischer Sprache erschienenen Dissertation „Über das Cauchysche Integral", deren Inhalt im wesentlichen in die oben zitierte Abhandlung *Priwaloffs* übergegangen ist. In dieser findet sich der in Rede stehende Satz auf S. 85, wo er auch in der Form ausgesprochen ist, daß wenn s und t entsprechende Bogen auf C und dem Einheitskreise bedeuten, die Funktionen s von t und t von s monoton wachsen und totalstetig sind. (Vergl. auch noch *F. Rieß*, Mathematische Zeitschrift 18, 1923, S. 85, besonders S. 95.)

$$(3)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,\frac{e^{\alpha i}}{e^{\alpha i}-re^{\vartheta i}}\,d\alpha = \begin{cases} F_i(z) & \text{für } |z|<1 \\ F_a(z) & \text{für } |z|>1 \end{cases}.$$

Die zu $f(\theta)$ gehörige *Fourier*reihe lautet:

$$(4)\qquad f(\theta)\sim u_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\{e^{\nu\gamma i}+e^{-\nu\gamma i}\}\,d\alpha\,,$$

wo gesetzt wurde:

$$(5)\qquad \gamma=\alpha-\theta,\quad u_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha\,;$$

nach dem Satze von *Fejér-Lebesgue* [1]) ist diese Reihe fast überall durch Bildung der arithmetischen Mittel erster Ordnung zum Summenwerte $f(\theta)$ summierbar. Setzen wir also

$$(6)\qquad s_n=1+z+\cdots+z^n,\quad S_{n-1}=\frac{s_0+\cdots+s_{n-1}}{n},$$

$$\varphi_{n-1}(z)=S_{n-1}-S_{n-2}=\frac{1}{n(n-1)}\,(z+2z^2+\cdots+(n-1)\,z^{n-1}),$$

$$\varphi_0(z)=1\,,$$

so ist

$$S_{n-1}=1+\varphi_1+\cdots+\varphi_{n-1}=\frac{n+1}{n}\,\frac{1}{1-z}-\frac{1}{n}\,\frac{1-z^{n+1}}{(1-z)^2}$$

und es gilt

$$(7)\qquad \frac{1}{1-z}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(z)$$

für $|z|\leqq 1$, ausgenommen $z=1$, und zwar konvergiert die Reihe rechterhand für $|z|<\varrho<1$ gleichmäßig. Also lautet die durch *Fejér*summation aus (4) hervorgehende Reihe:

$$(8)\qquad f(\theta)=u_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(u_\nu+v_\nu)\,,$$

wo für $\nu=1,2,\ldots$

$$(9)\qquad u_\nu=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,\varphi_\nu(e^{-\gamma i})\,d\alpha\,,\qquad v_\nu=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,\varphi_\nu(e^{\gamma i})\,d\alpha$$

zu nehmen ist und die Gleichung (8) gilt fast überall in dem Intervall $-\pi\leqq\theta<+\pi$ insbesondere an allen Stellen, wo $f(\theta)$ stetig ist. Wir bezeichnen die Darstellung (8) kurz als die *Fejérentwicklung* von $f(\theta)$ [2]).

Nun ist nach (7) für $|z|\leqq 1,\ \gamma\neq 0$

$$(10)\qquad \frac{e^{\alpha i}}{e^{\alpha i}-re^{\vartheta i}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(re^{-\gamma i})\,,$$

---

[1]) Vergl. z. B. *Schlesinger-Pleßner*, Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen, Berlin 1926, S. 250.

[2]) Vergl. *Fejér*, Mathematische Annalen 58, 1903, S. 59.

es ergibt sich also aus (3) für $|z| < 1$ die Darstellung

$$(11) \qquad F_i(z) = u_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, \varphi_\nu(r e^{-\gamma i})\, d\alpha, \qquad z = r e^{\vartheta i},$$

und ganz ebenso folgt für $|\bar{z}| > 1$

$$(12) \qquad F_a(\bar{z}) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, \varphi_\nu \left(\frac{1}{r'}\, e^{\gamma i}\right) d\alpha, \qquad \bar{z} = r' e^{\vartheta i}\ ^{1}).$$

Diese Entwicklungen der Innen- bzw. Außenfunktionen können also direkt hingeschrieben werden, wenn die *Fejér*entwicklung von $f(\theta)$ bekannt ist.

Wenn sich z von innen und $\bar{z}$ von außen her einem Peripheriepunkte $e^{\vartheta i}$ so annähert, daß $rr' = 1$ ist, so gilt [2]) für den Randwert der Differenz $F_i(z) - F_a(\bar{z})$ (dem sogenannten *Sprung* an der Stelle $e^{\vartheta i}$) zufolge des *Abel*schen Grenzwertsatzes über Potenzreihen, der sich ohne Schwierigkeit hierher übertragen läßt, nach (11) und (12)

$$(13) \qquad \lim_{r\to 1} (F_i(z) - F_a(\bar{z})) = (\overline{F_i - F_a}) = u_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (u_\nu + v_\nu) = f(\theta).$$

Die Reihe $u_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (u_\nu - v_\nu)$ geht aus der zu der *Fourier*reihe (4) konjugierten trigonometrischen Reihe durch Anwendung der *Fejér*schen Summation hervor. Für diese konjugierte Reihe folgt aber, da die Funktion $f(\theta)$ beschränkt sein sollte, aus dem *Fischer-Rieß*schen Satze [3]), daß sie die *Fourier*reihe einer samt ihrem Quadrate integrierbaren Funktion, und folglich nach dem *Fejér-Lebesgue*schen Satze fast überall durch die arithmetischen Mittel erster Ordnung summierbar ist. Die Reihe $u_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (u_\nu - v_\nu)$ ist demnach fast überall konvergent, und somit ergibt sich durch abermalige Anwendung des *Abel*schen Grenzwertsatzes, daß auch für den Randwert der Summe $F_i(z) + F_a(\bar{z})$

$$(14) \qquad \lim_{r\to 1} (F_i(z) + F_a(\bar{z})) = (\overline{F_i + F_a}) = u_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (u_\nu - v_\nu)$$

gilt. — Aus (13) und (14) folgt nunmehr die simultane Existenz der einzelnen Randfunktionen

$$(15) \qquad \overline{F}_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu, \qquad \overline{F}_a = \sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu;$$

wir können also sagen, daß die Randfunktionen $\overline{F}_i$ und $\overline{F}_a$ fast überall existieren und Entwicklungen (15) besitzen, die sich unmittelbar aus der *Fejér*entwicklung

[1]) Wenn die Außenfunktion $F_a(z)$ für $z = \infty$ nicht verschwindet, sondern den Wert $c = F_a(\infty)$ annimmt, so tritt auf der rechten Seite von Gl. (12) noch ein Glied $v_0 = c$ hinzu.

[2]) Siehe *Hermite* a. a. O.

[3]) Für diesen Schluß vergleiche man *L. Lichtenstein*, dieses Journal 141, 1913, S. 23,24 und *A. Pleßner*, a. a. O. S. 8. — Es ist hier übrigens die einzige Stelle, an der die für die Funktion $f(v)$ vorausgesetzte Beschränktheit ausgenutzt wird. Läßt man diese Voraussetzung fallen, und postuliert für $f(v)$ nur die Integrierbarkeit im Sinne von *Lebesgue*, so bleiben alle Schlüsse bestehen, nur muß man sich an dieser Stelle direkt auf die Ergebnisse der Abhandlung von *Pleßner* berufen.

von $f(\theta)$ hinschreiben lassen. Dabei ist zu bemerken, daß diese Entwicklungen (15) im allgemeinen keine *Fejér*entwicklungen der betreffenden Funktionen sein werden, da ja diese Funktionen $\overline{F_i}$ und $\overline{F_a}$ nicht notwendig im Sinne von *Lebesgue* integrierbar sind.

Damit ist die erste der oben (S. 1, 2) aufgeworfenen Fragen erledigt und auch schon ein Beitrag für die Beantwortung der zweiten geliefert. In bezug auf diese zweite Frage sollen nun noch die Bedingungen dafür angegeben werden, daß eine der beiden Randfunktionen fast überall mit der Funktion $f(\theta)$ übereinstimmt.

Sollte etwa $\overline{F_i} = f(\theta)$ sein, so folgt aus (8) und (15), daß fast überall $\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu = 0$ oder $\overline{F_a} = 0$ ist, d. h. in diesem Falle ist die für $|z| > 1$ geltende, nach negativen ganzzahligen Potenzen von z fortschreitende Entwicklung der Außenfunktion $\overline{F_a}(z)$ auf dem Einheitskreise fast überall mit den arithmetischen Mitteln erster Ordnung zum Summenwerte Null summierbar. Daraus folgt aber nach einem Satze von *Priwaloff* (a. a. O. S. 93, § 9), daß $\overline{F_a}(z)$ identisch verschwindet, d. h. also, daß alle Koeffizienten

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(a)\, e^{\nu a i}\, da \tag{16}$$

in der zu $f(\theta)$ gehörigen *Fourier*reihe (4), also auch alle v_ν für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ gleich Null sein müssen.

Umgekehrt bewirkt das identische Verschwinden von $F_a(z)$ das Verschwinden aller v_ν und damit die Gleichung $\overline{F_i} = f(\theta)$. Es ist also dafür, daß die Funktion $f(\theta)$ fast überall mit der Randfunktion $\overline{F_i}$ übereinstimmt, notwendig und hinreichend, daß $F_a(z)$ identisch verschwindet oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß alle v_ν oder alle Koeffizienten (16) gleich Null sind [1]).

Natürlich ergibt sich analog als Bedingung dafür, daß die Gleichung $f(\theta) = \overline{F_a}$ fast überall besteht, das identische Verschwinden der Innenfunktion $F_i(z)$ oder das Verschwinden aller u_ν oder aller Koeffizienten

$$\frac{1}{\pi}\int_{+\pi}^{-\pi} f(a)\, e^{-\nu a i}\, da$$

der zu $f(\theta)$ gehörigen *Fourier*reihe (4).

Es entspricht also in der *Fejér*entwicklung (8) von $f(\theta)$ in gewissem Sinne der Teil $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ der Innenfunktion $F_i(z)$ und der Teil $\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$ der Außenfunktion $F_a(z)$.

Um diese Ergebnisse und Formeln auf den allgemeinen Fall einer beliebigen geschlossenen und rektifizierbaren Jordankurve C zu übertragen, hat man nur überall an die Stelle von z die abbildende Funktion $g(u)$ zu setzen.

---

[1]) Diese Kriterien finden sich in mehr oder weniger abweichender Form schon bei *Hermite*, *Hamburger*, *Plemelj*, *M.* und *F. Rieß*, *Priwaloff*, a. a. O. —

Über trigonometrische Integrale mit nur reellen Nullstellen.

Von *G. Pólya* in Zürich.

Es werden im folgenden trigonometrische Integrale von der Form

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{izt}\, dt$$

betrachtet. Von der für reelle Werte von t definierten Funktion $F(t)$ wird ständig vorausgesetzt, daß sie in jedem endlichen Intervall eigentlich integrabel ist, daß sie in Punkten, die zum Nullpunkt symmetrisch liegen, konjugiert komplexe Werte annimmt,

$$(2) \qquad F(-t) = \overline{F(t)},$$

und schließlich, daß es zwei positive Konstanten A und a gibt, so beschaffen, daß für alle reellen Werte von t

$$(3) \qquad |F(t)| < A\, e^{-|t|^{2+a}}$$

gilt. Gemäß (3) stellt das Integral (1) eine ganze Funktion von z dar, die gemäß (2) für reelles z reelle Werte annimmt. Unter welchen Bedingungen kann man behaupten, daß die durch (1) dargestellte ganze Funktion nur reelle Nullstellen hat? Zu dieser Frage soll die vorliegende Arbeit einen Beitrag liefern.

Auf den ersten Anblick scheint diese Fragestellung ziemlich willkürlich und künstlich zu sein. Anlaß dazu gab der Umstand, daß *Riemann* die von ihm in die Primzahltheorie eingeführte ξ-Funktion durch ein Integral von der Form (1) dargestellt hat [1]). Die Fragestellung selbst ist in einer Abhandlung von *Jensen* erwähnt [2]); die von ihm in Aussicht gestellten weiteren Publikationen, die nähere Ausführungen hätten enthalten sollen, sind ausgeblieben.

Nach Behandlung einiger Beispiele [3]) ist es mir gelungen, einen Teil der Frage-

---

[1]) *B. Riemann*, Werke (1876), S. 138.

[2]) *J. L. W. V. Jensen*, Acta Mathematica, **36** (1912), 181—195.

[3]) *G. Pólya*, a) Mathematische Zeitschrift, **2** (1918), 352—383. b) The Messenger of Mathematics, **52** (1923), 185—188. c) Acta Mathematica, **48** (1926), 305—317. d) Bolletino dell' Unione Matematica Italiana **5** (1926), 64—68. e) The Journal of The London Mathematical Society, **1** (1926), 98—99. Vgl. ferner *S. Kakeya*, Proc. of The Physico-Math. Society of Japan, (3) **2** (1920), No. 7, und für eine verwandte Frage *F. Bernstein*, Mathematische Annalen, **79** (1919), 265—268.

stellung zu isolieren, der einer abgerundeten Lösung fähig ist. Es handelt sich dabei *um universell anwendbare Faktoren, die die Realität der Nullstellen erhalten.* Genauer wird dieser Begriff durch den folgenden Satz umschrieben:

I. *Die Funktion $\varphi(t)$ sei analytisch für alle reellen Werte von t und von folgender Beschaffenheit: Wenn das Integral*

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{izt}\, dt$$

nur reelle Nullstellen hat, so hat (wie auch $F(t)$ sonst beschaffen sei) das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, F(t)\, e^{izt}\, dt$$

ebenfalls nur reelle Nullstellen. Hierzu ist notwendig und hinreichend, daß $C e^{\gamma t^2} \varphi(it)$ eine ganze Funktion vom Geschlecht 1 sei, die nur reelle Nullstellen besitzt und für reelles t reelle Werte annimmt; C bedeutet eine nichtverschwindende, γ eine reelle, nichtnegative Konstante.

Zur Erläuterung sei beigefügt, daß von der Funktion $\varphi(t)$ ziemlich viel gefordert wird, nämlich nicht bloß, daß sie die Realität der Nullstellen von einem oder einigen Integralen von der Form (1) erhält, sondern von überhaupt allen, die nur reelle Nullstellen haben. Eben weil die Forderung so stark ist, kann die Natur von $\varphi(t)$ so scharf präzisiert werden. Der Begriff: „vom Geschlecht 1" ist so aufzufassen, daß die ganzen Funktionen vom Geschlecht 0, die ganzen rationalen Funktionen und die Konstanten als spezielle Funktionen vom Geschlecht 1 gelten. Die notwendige und hinreichende Bedingung, die für $\varphi(t)$ durch Satz I angegeben wird, besteht eigentlich darin, daß $\varphi(it)$ *ein Polynom mit nur reellen Nullstellen oder ein Grenzwert solcher Polynome sei* [1]).

Die Fragestellung betreffend $\varphi(t)$ ist analog zu einer auf *Laguerre* zurückgehenden Frage; diese betrifft Faktorenfolgen, welche die Realität der Nullstellen von Polynomen erhalten, und wurde von *J. Schur* und dem Verfasser gelöst a. a. O.[1]). In der Tat werden dieselben Hilfsmittel in beiden Fällen herangezogen.

Ich benutze die Gelegenheit, noch einen mit denselben Hilfsmitteln beweisbaren Satz mitzuteilen:

II. *Es sei die Funktion $f(t)$ für positive Werte von t definiert, reellwertig, absolut integrabel und für genügend großes t der Ungleichung*

$$(4) \qquad |f(t)| < B e^{-t^{\frac{1}{1}+\beta}}$$

unterworfen (B, β sind positive Konstanten). Ferner sei $f(t)$ in einer Umgebung des Punktes $t = 0$ analytisch. Dann stellt das Integral

$$\int_0^{\infty} t^{z-1} f(t)\, dt = H(z)$$

---

[1]) *G. Pólya* u. *J. Schur*, dieses Journal, **144** (1914), 89—113.

eine meromorphe Funktion dar. Wenn die Funktion $H(z)$ nur reelle negative Nullstellen besitzt, und q eine positive ganze Zahl ist, so besitzt die durch das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t^{2q}) e^{izt} dt$$

dargestellte ganze Funktion nur reelle Nullstellen.

Die Ungleichungen (3), (4) hätten durch weniger einschränkende ersetzt werden können, aber ich wollte mich dabei nicht aufhalten. Beide Sätze sind zur Feststellung der Realität der Nullstellen in speziellen Fällen gut brauchbar, was ich durch Beispiele belegen will.

Zusammenstellung von Hilfssätzen über eine Klasse von ganzen Funktionen.

1. Eine ganze Funktion $g(z)$ soll kurz als eine „*reell gerichtete*“ Funktion bezeichnet werden, wenn sie das Produkt von $e^{-\gamma z^2}$ und einer ganzen Funktion vom Geschlecht 1 ist, die nur reelle Nullstellen hat und für reelles z reelle Werte annimmt; γ bezeichnet eine reelle nichtnegative Konstante. Es ist also

$$g(z) = A z^q e^{-\gamma z^2 + \delta z} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + \delta_\nu z) e^{-\delta_\nu z} \tag{5}$$

wo die ganze Zahl $q \geqq 0$ ist, sämtliche Konstanten $A, \gamma, \delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$ reell sind, $\gamma \geqq 0$ ist und $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \cdots$ konvergiert. Hierbei ist der Begriff des Geschlechtes 1 so auszulegen, wie in der Einleitung im Anschluß an Satz I gesagt wurde. Es wird insbesondere zugelassen, daß einige oder auch sämtliche Zahlen $\gamma, \delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$ verschwinden.

Die reell gerichteten Funktionen sind durch die Produktentwicklung (5) definiert worden; man kann sie aber auch durch die Beschaffenheit ihrer Potenzreihenentwicklung charakterisieren, wie der folgende Satz lehrt [1]):

A. *Damit die Potenzreihe*

$$a_0 + \frac{a_1}{1!} z + \frac{a_2}{2!} z^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!} z^n + \cdots \tag{6}$$

eine reell gerichtete ganze Funktion darstelle, ist notwendig und hinreichend, daß die Polynome

$$P_n(z) = a_0 + a_1 \binom{n}{1} \frac{z}{n} + a_2 \binom{n}{2} \left(\frac{z}{n}\right)^2 + \cdots + a_n \binom{n}{n} \left(\frac{z}{n}\right)^n \tag{7}$$

nur reelle Nullstellen besitzen $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Aus dem Inhalt des Satzes A. hebe ich besonders hervor, daß die Realität der Nullstellen der Polynome (7) die Konvergenz der Reihe (6) für jedes z nach sich zieht. Steht diese Konvergenz schon fest, so ist leicht zu sehen, daß

$$\lim_{n \to \infty} P_n(z) = a_0 + \frac{a_1}{1!} z + \frac{a_2}{2!} z^2 + \cdots \tag{8}$$

---

[1]) Vgl. a. a. O. [S. 7, Anm. 1], Satz IV, S. 110.

gleichmäßig in jedem endlichen Bereich gilt. Ferner ist leicht zu sehen, daß, wenn die Reihe (6) eine ganze Funktion von der Form (5) darstellt, die Polynome (7) einer Ungleichung von der Form

$$|P_n(z)| < e^{(|z|^2+1)K} \tag{9}$$

genügen ($n = 1, 2, 3, \ldots$; z beliebig), wo K eine passende positive Konstante bezeichnet [1]).

Die Gleichung (8) lehrt, daß die reell gerichteten Funktionen gleichmäßig durch Polynome mit nur reellen Nullstellen approximiert werden können. Dies ist, nebenbei bemerkt, die wesentliche Eigenschaft dieser Funktionen. Es folgen daraus mit Leichtigkeit zahlreiche weitere Sätze, insbesondere die folgenden:

B. *Ist*

$$h(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_l z^l$$

ein Polynom mit nur reellen Nullstellen und $g(z)$ eine reell gerichtete ganze Funktion, so hat die Funktion

$$h(D)g(z) = b_0 g(z) + b_1 g'(z) + b_2 g''(z) + \cdots + b_l g^{(l)}(z) \tag{10}$$

nur reelle Nullstellen.

C. *Ist $h(z)$ eine reell gerichtete ganze Funktion, die für positives z nicht verschwindet, und stellt die Potenzreihe* (6) *irgendeine reell gerichtete ganze Funktion dar, so stellt auch die Potenzreihe*

$$a_0 h(0) + \frac{a_1 h(1)}{1!} z + \frac{a_2 h(2)}{2!} z^2 + \cdots + \frac{a_n h(n)}{n!} z^n + \cdots$$

eine ganze Funktion ohne imaginäre Nullstellen dar.

Auf Grund von A. reduziert sich der Beweis der Sätze B. C. im wesentlichen auf den fast trivialen Fall, worin $g(z)$ ein Polynom und $h(z)$ ein Polynom ersten Grades ist [2]). — Das in (10) auftretende Symbol D ist das Symbol des Differenzierens in bezug auf z.

2. Kraft der Bedingung (3) ist

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{izt}\, dt\right| < 2A \int_0^{\infty} e^{|z|t - t^{2+\alpha}}\, dt$$

$$= 2A\left(\int_0^{2|z|^{\frac{1}{\alpha+1}}} + \int_{2|z|^{\frac{1}{\alpha+1}}}^{\infty}\right) \exp\left(|z|\, t - t^{2+\alpha}\right) dt$$

$$< 2A\left[|z|^{-1} \exp\left(2|z|^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}}\right)\right] + \int_0^{\infty} \exp\left(-\tfrac{1}{2} t^{2+\alpha}\right) dt;$$

---

[1]) Vgl. die mit (9) äquivalente Ungleichung a. a. O. [S. 7, Anm. 1], S. 97, Formel (10).

[2]) Satz B. rührt in seiner einfachsten Form von *Hermite* und *Poulain*, Satz C. von *Laguerre* her. Vgl. z. B. *G. Pólya* u. *G. Szegö*, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, (Berlin 1925), die Nummern V 62—67, 167. Ferner a. a. O. [S. 6, Anm. 2], S. 185, 190 und a. a. O. [S. 7, Anm. 1], S. 112.

wir haben benutzt, daß

$$|z|\,t - t^{2+\alpha} < |z|\,t \qquad \text{für } 0 < t < 2|z|^{\frac{1}{1+\alpha}},$$

$$|z|\,t - t^{2+\alpha} < (\tfrac{1}{2}t)^{1+\alpha}\,t - t^{2+\alpha} < -\tfrac{1}{2}\,t^{2+\alpha} \qquad \text{für } t > 2|z|^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

ist. Somit stellt das Integral (1) eine ganze Funktion dar, deren Ordnung höchstens

$$\frac{2+\alpha}{1+\alpha} < 2$$

und deren Geschlecht folglich höchstens 1 ist.

Das Integral (1) fällt ferner kraft (2) für reelles z reell aus. Wenn es eine ganze Funktion ohne imaginäre Nullstellen darstellt, so ist dieselbe reell gerichtet.

Ein für uns interessanter Grenzfall der Integrale (1) sind die ganzen Funktionen von der Form

$$(11) \qquad c_0 e^{-inz} + c_1 e^{i(2-n)z} + \cdots + c_\nu e^{i(2\nu-n)z} + \cdots + c_n e^{inz};$$

hierin bedeuten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ Konstanten. Die Funktion (11) ist von Ordnung und Geschlecht 1; sie ist, wie leicht zu sehen, eine reell gerichtete Funktion, wenn die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$(12) \qquad c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n = 0$$

alle vom absoluten Betrage 1 sind und die zusätzliche Bedingung

$$(13) \qquad c_n = \bar{c}_0 \neq 0$$

erfüllt ist.

Beweis des Satzes I.

3. Es sei angenommen, daß das Integral (1) eine ganze Funktion mit nur reellen Nullstellen darstellt.

Es stellt dann (1), wie unter 2. überlegt, eine reell gerichtete Funktion dar. Es sei $g(z)$ irgendeine reell gerichtete Funktion, dargestellt durch die Potenzreihe (6). Dann hat, gemäß Satz A., auch $P_n(z)$, und, gemäß Satz B., auch

$$(14) \qquad P_n(D)\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,e^{izt}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(it)\,F(t)\,e^{izt}\,dt$$

nur reelle Nullstellen; das Symbol D ist in (14) wie in (10) verwendet. Lassen wir an der rechten Seite von (14) n gegen ∞ streben, so erhalten wir, gemäß (8), (9), (3) die Grenzfunktion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(it)\,F(t)\,e^{izt}\,dt\,,$$

die, als gleichmäßiger Grenzwert von ganzen Funktionen mit nur reellen Nullstellen, ebenfalls nur reelle Nullstellen besitzt.

Anders gesagt, ist $g(it)$ ein Faktor, der die Realität der Nullstellen von (1)

erhält, falls $g(z)$ eine reell gerichtete ganze Funktion ist, und hiermit ist die eine Hälfte des Satzes I schon bewiesen [1]).

4. Zur Vorbereitung der anderen Hälfte von Satz I dient das folgende

Lemma. *Es sollen sämtliche Wurzeln der Gleichung* (12) *vom Betrage* 1 *sein,* (13) *sei erfüllt, und die Funktion* (1) *soll nur reelle Nullstellen besitzen. Dann hat, falls* δ *eine reelle Zahl bedeutet und*

$$c_0 F(t-n\delta) + c_1 F(t+(2-n)\delta) + \cdots + c_\nu F(t+(2\nu-n)\delta) + \cdots + c_n F(t+n\delta) = F^*(t)$$

gesetzt wird, auch das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^*(t)\, e^{izt}\, dt$$

nur reelle Nullstellen.

Es ist in der Tat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^*(t)\, e^{izt}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu F(t-(n-2\nu)\delta)\, e^{izt}\, dt$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\, e^{iz(u+(n-2\nu)\delta)}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\, e^{izu}\, du \cdot \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu e^{iz(n-2\nu)\delta}$$

ein Produkt von zwei Funktionen, die beide nach Voraussetzung nur reelle Nullstellen haben.

5. Es sei nun angenommen, daß $\varphi(t)$ ein universell anwendbarer Faktor ist, der die Realität der Nullstellen der Integrale von der Form (1) erhält. Ferner sei $\varphi(t)$ analytisch für alle reellen Werte von t. Es soll um den Punkt $t=0$ herum die Reihenentwicklung

$$\varphi(t) = b_0 + \frac{b_1}{1!}\, t + \frac{b_2}{2!}\, t^2 + \cdots \tag{15}$$

gelten. $\varphi(t)$ ist durch die analytische Fortsetzung der Reihe (15) für reelles t eindeutig bestimmt.

Nun hat das spezielle Integral (1), worin

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & \text{für } -a \leqq t \leqq a, \\ 0 & \text{„ } \quad |t| > a \end{cases} \tag{16}$$

ist (a ist eine von t unabhängige positive Zahl), nur reelle Nullstellen, da

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} e^{izt}\, dt = \frac{\sin az}{az}$$

---

[1]) Es gilt übrigens etwas mehr: Wenn das Integral (1) eine endliche Anzahl $2j$ von nichtreellen Nullstellen hat, so hat (14), und folglich die Grenzfunktion nicht mehr als $2j$ nichtreelle Nullstellen.

ist. Wir finden weiter, indem wir in dem Lemma unter 4.

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n = (1 - z)^n (-i)^n$$

setzen, daß auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} F(t - (n - 2\nu)\delta)\, e^{izt}\, dt$$

nur reelle Nullstellen hat.

Diese reellen Nullstellen hat aber $\varphi(t)$, nach Voraussetzung, zu erhalten. Somit hat auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} F(t - (n - 2\nu)\delta)\, e^{izt}\, dt$$

nur reelle Nullstellen; letzterer Ausdruck ist, gemäß (16),

$$= \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha+(n-2\nu)\delta}^{+\alpha+(n-2\nu)\delta} \varphi(t)\, e^{izt}\, dt\,.$$

Läßt man hierin zuerst α und dann, nach Division mit $(2\delta)^n$, δ gegen 0 streben, so erhält man sukzessive, daß die ganzen Funktionen

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \varphi((n - 2\nu)\delta)\, e^{iz(n-2\nu)\delta}$$

und

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{(2\delta)^n} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \varphi((n - 2\nu)\delta)\, e^{iz(n-2\nu)\delta} = \left\{\frac{d^n}{dt^n}\left[\varphi(t) e^{izt}\right]\right\}_{t=0}$$

$$= \varphi(0)(iz)^n + \binom{n}{1} \varphi'(0)(iz)^{n-1} + \cdots = b_0 (iz)^n + \binom{n}{1} b_1 (iz)^{n-1} + \cdots + b_n$$

nur reelle Nullstellen haben; vgl. (15). Also haben auch die Polynome

$$b_0 + b_1 \binom{n}{1} \frac{iz}{n} + b_2 \binom{n}{2} \left(\frac{iz}{n}\right)^2 + \cdots + b_n \binom{n}{n} \left(\frac{iz}{n}\right)^n$$

nur reelle Nullstellen, und somit ist, gemäß Satz A., die Potenzreihe

$$b_0 + \frac{b_1}{1!} iz + \frac{b_2}{2!} (iz)^2 + \cdots = \varphi(iz)$$

stets konvergent, und stellt (eventuell abgesehen von einem komplexen konstanten Faktor) eine reell gerichtete Funktion dar. Hiermit ist auch die zweite Hälfte von Satz I bewiesen.

Beispiele zu Satz I.

6. Die vorliegende Nummer ist von den übrigen Teilen der Arbeit unabhängig und erbringt einen neuen Beweis des folgenden Satzes [1]):

[1]) Vgl. a. a. O. [S. 6, Anm. 3c]. Es kann (17) als $\pi i \exp(-\frac{1}{2}\pi z) H_{iz}^{(1)}(i\alpha)$ bezeichnet werden. Vgl. *G. N. Watson*, A treatise on the theory of Bessel functions, (Cambridge 1922), S. 180, Formel (10).

Ist a ein positiver Parameter, so stellt das Integral

$$(17)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\tfrac{1}{2}\,a(e^t+e^{-t})+izt\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\cosh t}e^{izt}\,dt$$

eine ganze Funktion von z mit nur reellen Nullstellen dar.

Zum Beweis werden die Rollen von a und z vertauscht, es wird z als ein komplexer Parameter und a als eine positive Variable angesehn. Wir wollen das Integral (17) zur Abkürzung mit w bezeichnen und für w als Funktion von a eine Differentialgleichung aufstellen. Einerseits findet man mittels partieller Integration, daß

$$(18)\qquad -z^2w = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\cosh t}\,\frac{d^2}{dt^2}\,e^{izt}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izt}\,\frac{d^2}{dt^2}\,e^{-a\cosh t}\,dt$$

ist. Andererseits findet man nach Differentiation unter dem Integralzeichen und Zusammenfassung, daß

$$(19)\qquad a^2\left(\frac{d^2w}{da^2}-w\right)+a\,\frac{dw}{da} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izt}e^{-a\cosh t}(a^2\sinh^2 t - a\cosh t)\,dt\,.$$

Die rechten Seiten von (18) und (19) sind einander gleich, und wir erhalten so die Differentialgleichung

$$(20)\qquad \frac{d}{da}\left(a\,\frac{dw}{da}\right) = \left(a-\frac{z^2}{a}\right)w\,.$$

Wir behandeln (20) mit einer Methode, die wohl zuerst von *A. Hurwitz* verwendet und dann durch *E. Hille* allseitig untersucht und durchgebildet wurde [1]). Wir ersetzen die Differentialgleichung, die von zweiter Ordnung ist, durch zwei Gleichungen erster Ordnung mit zwei Unbekannten, indem wir

$$(21)\qquad \frac{dw}{da}=\frac{W}{a}\,,\qquad \frac{dW}{da}=\left(a-\frac{z^2}{a}\right)w$$

schreiben. Wir gehen nun in der ersten Gleichung (21) zu den konjugierten Werten über; durch Multiplikation mit W bzw. $\bar{w}$ und Addition erhalten wir

$$(22)\qquad \frac{d}{da}(W\bar{w}) = \frac{1}{a}\left(|W|^2+(a^2-z^2)\,|w|^2\right).$$

Nun bedeutet w das Integral (17) und daher ist offenbar

$$(23)\qquad \lim_{a\to\infty} w = \lim_{a\to\infty} W = 0\,.$$

Es sei nun angenommen, daß für $a=a_0>0$ das Integral (17) verschwindet; wir erhalten dann aus (22) mit Rücksicht auf (23)

$$(24)\qquad 0 = \int_{a_0}^{\infty} a^{-1}\left(|W|^2+(a^2-z^2)\,|w|^2\right)da\,.$$

---

[1]) Unter mehreren diesbezüglichen Arbeiten von *E. Hille* sei besonders hervorgehoben: Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, **16** (1922), Nr. 17.

Insbesondere muß der Imaginärteil der rechten Seite von (24) verschwinden, d. h. es ist, $z = x + iy$ gesetzt, wo x, y reell sind,

$$0 = -2ixy\int_{a_0}^{\infty} a^{-1}\,|w|^2\,da. \tag{25}$$

Nun ist klar, daß das Integral (17), das heißt $w > 0$ ist, wenn $x = 0$ ist, und so kann es sich beim Verschwinden von w für $a = a_0$ nur um den Fall

$$x \neq 0 \tag{26}$$

handeln. Aus (25), (26) folgt, daß $y = 0$ ist, d. h. es kann (17) nur für reelles z verschwinden. W. z. b. w.

7. Satz I gestattet aus dem Integral (17), dessen Nullstellen eben als reell erkannt worden sind, beliebig viele andere von derselben Eigenschaft abzuleiten. Da für positive A, a

$$2A\cos az = A(e^{iaz} + e^{-iaz})$$

offenbar eine reell gerichtete Funktion ist, hat auch das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(e^{at} + e^{-at})\,e^{-a\cosh t}\,e^{izt}\,dt \qquad (A, a, a > 0) \tag{27}$$

nur reelle Nullstellen. Dies ist insofern von einigem heuristischen Interesse, als die *Riemann*sche ξ-Funktion sich durch ein Integral von der Form (1) darstellen läßt, dessen Integrand für große reelle Werte von t sich wie der Integrand von (27) verhält [1]). Ähnliches gilt übrigens für diejenige Verallgemeinerung der ξ-Funktion, die in analoger Beziehung zu der *Dedekind*schen ζ-Funktion steht, wie die gewöhnliche ξ-Funktion zu der *Riemann*schen ζ-Funktion.

Übrigens hat auch das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [A(e^{at} + e^{-at}) - B(e^{bt} + e^{-bt})]\,e^{-a\cosh t}\,e^{izt}\,dt \tag{28}$$

nur reelle Nullstellen, falls

$$A > B > 0, \quad a > b > 0, \quad a > 0 \tag{29}$$

ist [2]). Denn sind a und b ganze Zahlen, so ist $Az^a - Bz^b$ ein Polynom, dessen Nullstellen offenbar im Einheitskreise liegen. Hieraus folgt weiter [3]), daß die Nullstellen von

$$Az^a - Bz^b - Bz^{-b} + Az^{-a}$$

den Betrag 1 haben, und schließlich, wie unter 2. besprochen wurde, daß

$$Ae^{iaz} - Be^{ibz} - Be^{-ibz} + Ae^{-iaz} \tag{30}$$

---

[1]) Vgl. a. a. O. [S. 6, Anm. 3c].
[2]) Vgl. a. a. O. [S. 6, Anm. 3c], die Fußnote S. 317.
[3]) Mit Hilfe des Argumentenprinzips, vgl. a. a. O. [S. 6, Anm. 3a], S. 359—361.

eine reell gerichtete Funktion ist. Wenn dies von (30) mit ganzzahligen a, b gilt, so gilt es auch mit rationalen und mit beliebigen reellen a, b, wie durch Variablenvertauschung und Grenzübergang ersichtlich ist. Somit ergibt (30) nach Vertauschung von z mit it einen Faktor, der dem Integranden des Integrals (17) beigefügt, dasselbe unter Wahrung der Wurzelrealität in (28) verwandelt.

Beweis des Satzes II.

8. Ich benutze zunächst (in bekannter Weise [1])) den Teil der Voraussetzung, daß $f(t)$ in einer Umgebung des Punktes $t = 0$ analytisch ist. Es sei die Reihenentwicklung

$$f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots$$

absolut konvergent für $0 \leqq t \leqq \varrho$, $\varrho > 0$. Dann gilt, falls der Realteil von z als positiv vorausgesetzt wird,

$$H(z) = \int_0^{\varrho} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^{\nu+z-1}\, dt + \int_{\varrho}^{\infty} f(t) t^{z-1}\, dt$$

oder auch

$$H(z) = \varrho^z \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu \varrho^\nu}{z+\nu} + \int_{\log \varrho}^{\infty} f(e^u) e^{zu}\, du. \tag{31}$$

Die Darstellung (31) ist in der ganzen z-Ebene gültig, ausgenommen gewisse nichtpositive ganze Zahlen, die einfache Pole für (31) sind. Somit ist (31) als eine meromorphe Funktion erkannt; wir wollen noch ihre Größenordnung abschätzen.

Gemäß Bedingung (4) kann man zu jeder, noch so großen positiven Konstanten a eine positive Konstante A finden, so daß

$$|f(e^u)| < B \exp\left(-e^{(\frac{1}{2}+\beta)u}\right) < A \exp\left(-|u|^{2+a}\right)$$

für alle genügend großen Werte von u besteht, und so folgt aus der Rechnung unter 2., daß der zweite Summand rechts in (31) eine ganze Funktion ist, deren Ordnung 1 nicht übersteigt. — Man schneide aus der z-Ebene Kreise vom Radius δ aus, $\delta > 0$, deren Mittelpunkte $z = 0, -1, -2, \ldots$ sind. In der übrigbleibenden durchlöcherten Ebene bleibt der erste Summand rechts in (31) dem Betrage nach kleiner als $K|\varrho^z|$, wo K eine passende Konstante bedeutet.

Es sei q eine positive ganze Zahl. Man bilde die Funktion

$$\frac{\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right) H\left(\frac{z+1}{2q}\right)}{\Gamma(z+1)} = h(z). \tag{32}$$

Der Zähler von $h(z)$ hat nur einfache Pole, die in den Punkten

$$-2, -4, -6, \ldots, -2n, \ldots$$
$$-1, -(2q+1), -(4q+1), \ldots, -(2nq+1), \ldots$$

---

[1]) Vgl. *A. Hurwitz,* Mathematische Annalen, **53** (1900), 220—224.

liegen. Alle diese Pole werden durch die Pole des Nenners, die in allen negativen ganzzahligen Punkten liegen, aufgehoben, und somit ist $h(z)$ eine ganze Funktion. Die Ordnung von $h(z)$ ist, nach der eben besprochenen Abschätzung von (31), höchstens 1. Wenn $H(z)$ nur reelle negative Nullstellen hat, hat $h(z)$ ersichtlicherweise auch nur reelle negative Nullstellen, ist also eine reell gerichtete Funktion, die für positives z nicht verschwindet.

Wir können somit Satz C. auf $h(z)$ und auf die Reihe

$$1 - \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} - \frac{z^6}{3!} + \cdots,$$

deren Summe die reell gerichtete Funktion $\exp(-z^2)$ ist, anwenden. Somit hat die Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h(2n) z^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n+1) H\left(\frac{2n+1}{2q}\right) z^{2n}}{n!\,\Gamma(2n+1)}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!} \int_0^{\infty} t^{\frac{2n+1}{2q}-1} f(t)\,dt = 2q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!} \int_0^{\infty} u^{2n} f(u^{2q})\,du$$

$$= 2q \int_0^{\infty} f(u^{2q}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (uz)^{2n}}{2n!} \cdot du = q \int_{-\infty}^{+\infty} f(u^{2q})\, e^{iuz}\,du$$

nur reelle negative Nullstellen. W. z. b. w. (Die Vertauschung von Summation und Integration ist wegen (4) ersichtlicherweise erlaubt.)

Beispiele zu Satz II.

9. Die meromorphen Funktionen

$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{a-1}\,dt = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)},\ (a>0), \qquad \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt = \Gamma(z)$$

haben bekanntlich außerhalb der reellen negativen Achse keine Nullstellen; folglich haben die trigonometrischen Integrale

$$\int_{-1}^{+1} (1-t^{2q})^{a-1} e^{izt}\,dt \qquad (a>0), \tag{33}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^{2q}} e^{izt}\,dt \tag{34}$$

nur reelle Nullstellen [1]). Verschiedene spezielle Fälle sind wohl bekannt. Z. B. stellt (33) für $q = 1$ bis auf einen unwesentlichen Faktor die *Bessel*sche Funktion $J_{a-\frac{1}{2}}(z)$ dar. Für $a < 1$ folgt die Realität der Nullstellen von (33) auch auf andere Weise [2]). Für $q = 1$ hat (34) bekanntlich überhaupt keine Nullstellen. Schließlich

[1]) Vgl. a. a. O. [S. 6, Anm. 3b].
[2]) Vgl. a. a. O. [S. 6, Anm. 3a, 3d].

sei bemerkt, daß man (34) auch aus (33) folgern kann, nämlich als Grenzfall für $a \to \infty$.

10. *Wenn $P(z)$ ein Polynom mit nur reellen negativen Nullstellen ist, und l, q positive ganze Zahlen sind, so hat*

$$\int_{-1}^{+1} (1 - t^{2q})^{l-1} P(t^{2q}) e^{izt} dt \tag{35}$$

nur reelle negative Nullstellen.

Man setze

$$P(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_m t^m \tag{36}$$

und untersuche gemäß Satz II die Funktion

$$\int_0^1 t^{z-1} (1 - t)^{l-1} P(t) dt \tag{37}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m} c_\mu \frac{\Gamma(\mu + z)\Gamma(l)}{\Gamma(l + \mu + z)} = \frac{\Gamma(l)\Gamma(z)}{\Gamma(l + m + z)} Q(z),$$

wobei $Q(z)$ ein Polynom m-ten Grades ist,

$$Q(z) =$$

$$\sum_{\mu=0}^{m} c_\mu z(z+1)\cdots(z+\mu-1)(l+\mu+z)(l+\mu+1+z)\cdots(l+m-1+z).$$

Andererseits findet man, daß

$$(1 + x)^{l-1} P(-x) = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\lambda=0}^{l-1} (-1)^\mu c_\mu \frac{(l-1)!}{\lambda!\,(l-\lambda-1)!} x^{\mu+\lambda} \tag{38}$$

$$= (l-1)! \sum_{n=0}^{l+m-1} \frac{Q(-n)x^n}{n!\,(l+m-n-1)!}$$

ist. Das Polynom (38) hat, nach Voraussetzung, m positive Nullstellen; folglich muß, gemäß der *Descartes*schen Regel, die Reihe seiner Koeffizienten, also die Zahlenreihe

$$Q(0),\ Q(-1),\ Q(-2), \ldots, Q(-l-m+1)$$

m Zeichenwechsel aufweisen. Somit hat $Q(z)$ m negative Nullstellen, also nur negative Nullstellen, und das Integral (37) erfüllt die Voraussetzungen von Satz II. W. z. b. w.

Man setze in (35)

$$P(t) = (1 + t)^{l+k-1}, \qquad l + k - 1 \geqq 0.$$

Es folgt, daß das Integral

$$\int_{-1}^{+1} (1 - t^{4q})^{l-1} (1 + t^{2q})^k e^{izt} dt$$

nur reelle Nullstellen hat; hieraus folgt durch leichten Grenzübergang und durch Hinzufügung des Faktors e^{ct^2} auf Grund des Satzes I dasselbe für das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^{4q}+bt^{2q}+ct^2} e^{izt}\, dt \qquad (a > 0,\ b \text{ reell},\ c \geqq 0). \tag{39}$$

Wir haben im vorhergehenden auf verschiedenen Wegen erkannt, daß die Integrale (17), (27), (28), (33), (34), (39) nur reelle Nullstellen besitzen. Vielleicht verdienen diese Resultate als Beobachtungsmaterial zur Auffindung einer tiefer dringenden Gesetzmäßigkeit etwas Beachtung.

Über adjungierte Polynome bei irreduziblen algebraischen Gebilden beliebiger Mannigfaltigkeit.

Von *Werner Schmeidler* in Breslau.

Einleitung.

Die Ausdehnung der algebraisch-geometrisch orientierten Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen auf beliebig viele unabhängige Veränderliche ist bisher vor allem darum nicht zustandegekommen, weil die Auflösung der Singularitäten eines algebraischen Gebildes beliebiger Mannigfaltigkeit im m-dimensionalen Raume in Analogie zu dem entsprechenden Prozeß bei ebenen Kurven und Flächen im dreidimensionalen Raum sich zurzeit noch nicht durchführen läßt. Auf dieser Auflösung beruhte aber der Begriff der adjungierten Kurven bzw. Flächen, und damit eine der wesentlichsten Grundlagen der Theorie.

Im folgenden soll nun ein Weg gezeigt werden, um unabhängig von diesem Auflösungsprozeß adjungierte Polynome für irreduzible algebraische Gebilde beliebiger Mannigfaltigkeit in Räumen beliebiger Dimensionenzahl zu gewinnen, die, von Ausnahmefällen abgesehen, für zwei Variable die Gesamtheit aller adjungierten Polynome erschöpfen. Die dabei benutzte Eigenschaft der adjungierten Polynome besteht in ihren Beziehungen zu den ganzen Größen des betreffenden Körpers und ist für zwei Variable wohl bekannt. Die Definition läßt ohne weiteres erkennen, daß jede Funktion des Körpers stets als Quotient zweier adjungierten Polynome darstellbar ist, sowie, daß die gemeinsamen Nullstellen aller adjungierten Polynome die singulären Punkte des Gebildes sind. Für die Theorie der algebraischen Funktionen genügt es, sich in Erweiterung der irreduziblen Gleichung der Kurve, also eines eingliedrigen Primideals, auf „Haupt-Primideale", d. h. auf solche zu beschränken, bei denen die Anzahl i der Polynome einer Basis vermehrt um die Mannigfaltigkeit r des Gebildes gleich der Anzahl m der Variablen ist[1]). Das Ideal $\mathfrak{A}$ der adjungierten Polynome erweist sich nun mit dem gegebenen Primideal zunächst als *affinrational kovariant*, was auch bei zwei Veränderlichen noch nicht bemerkt worden ist und zu der affinrationalen Invarianz des Grades und der Exponenten der einzelnen Linearfaktoren des *Kronecker*schen außerwesentlichen Diskriminantenteilers der Kurvengleichung führt. Mit Hilfe des *Hentzelt*schen Resultanten-Begriffes wird dies auf beliebig viele Variable verallgemeinert.

[1]) Schon $i = 1$ würde dafür genügen; doch hat der Fall $i > 1$ geometrisches Interesse.

Ferner wird unter Einführung homogener Koordinaten die projektive Invarianz der adjungierten Formen gezeigt. Endlich beschränke ich die fernere Betrachtung auf die adjungierten Formen der Dimension $m_1+m_2+\cdots+m_i-m-1$, wenn das Gebilde der Schnitt von i Formen der Dimensionen $m_1, \ldots, m_i$ ist. Die Maximalanzahl der linear unabhängigen Formen dieser Dimension wird im allgemeinen im Falle der Mannigfaltigkeit Eins das Geschlecht der Kurve, im Falle der Mannigfaltigkeit Zwei das geometrische Geschlecht der Fläche, allgemein das *Haupt-Geschlecht der algebraischen Mannigfaltigkeit*, dem sich unter der Voraussetzung, daß der Schnitt des Gebildes mit einer allgemeinen adjungierten Form dieser Dimension ebenfalls ein irreduzibles Gebilde ist, $r-1$ weitere Geschlechtszahlen anreihen lassen. Die birationale Invarianz dieser Anzahlen wird unter gewissen einschränkenden Bedingungen bewiesen.

Insofern klassische Arbeiten von *Kronecker*, *Dedekind-Weber* und *Max Noether* in den Spalten dieses Journals die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen begründet haben, glaube ich mit den folgenden Zeilen, dem Zwecke dieses Jubiläumsbandes entsprechend, zur Ehrung der Manen jener Meister der Vergangenheit einen bescheidenen Beitrag zu leisten.

§ 1.

Definition der adjungierten Polynome eines irreduziblen algebraischen Gebildes beliebiger Mannigfaltigkeit.

1. Es sei

$$F(x_1, \ldots, x_m) = 0 \tag{1}$$

die Gleichung eines irreduziblen algebraischen Gebildes im Raume von m Dimensionen von der Mannigfaltigkeit $m-1$, F selbst ein Polynom vom Grade n, das wir in sämtlichen Variablen als regulär voraussetzen. Dann ist vermöge $F=0$ insbesondere x_1 eine ganze algebraische Funktion von $x_2, \ldots, x_m$.

Es sei ferner $\omega = \chi(x_1, \ldots, x_m)$ irgendeine in $x_1, \ldots, x_m$ rationale Funktion, die als Funktion von $x_2, \ldots, x_m$ ganz algebraisch ist, d. h. vermöge $F=0$ einer Gleichung

$$\omega^\mu + a_1(x_2, \ldots, x_m)\,\omega^{\mu-1} + \cdots + a_\mu(x_2, \ldots, x_m) = 0$$

mit Polynomen $a_1, \ldots, a_\mu$ als Koeffizienten genügt. Es gilt dann bekanntlich, wie *Kronecker* [2]) gezeigt hat, eine Darstellung der Form

$$\omega \equiv \frac{\varphi_1(x_1, \ldots, x_m)}{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}\ (F). \tag{2}$$

Hierbei besagt, wie im folgenden stets, die Kongruenz zweier rationaler Funktionen $\frac{P_1}{Q_1} \equiv \frac{P_2}{Q_2}\ (F)$, daß $P_1Q_2 - P_2Q_1 \equiv 0\ (F)$, $Q_1Q_2 \not\equiv 0\ (F)$ ist. φ_1 bedeutet in Formel (2) ein Polynom in $x_1, \ldots, x_m$.

Ganz analog gilt, wenn wir $m-1$ andere der Variablen $x_1, \ldots, x_m$ als unab-

[2]) Über die Diskriminante algebraischer Funktionen einer Veränderlichen, dieses Journal Bd. 91 (1881), S. 301—334, insbesondere S. 307.

hängige, die übrigbleibenden als abhängige Variable ansehen, die alsdann mod F eine ganze algebraische Funktion der $m-1$ unabhängigen Variablen ist,

$$(2) \qquad \omega \equiv \frac{\varphi_2(x_1, \ldots, x_m)}{\frac{\partial F}{\partial x_2}} \equiv \cdots \equiv \frac{\varphi_m(x_1, \ldots, x_m)}{\frac{\partial F}{\partial x_m}} \quad (F),$$

wobei $\varphi_2, \ldots, \varphi_m$ wiederum Polynome in $x_1, \ldots, x_m$ bedeuten.

Ist daher $\omega_1, \ldots, \omega_m$ ein beliebiges System von m ganzen algebraischen Funktionen von $x_2, \ldots, x_m$ (oder, was dasselbe besagt, eines anderen Systems von $m-1$ der Variablen $x_1, \ldots, x_m$, also kurz gesagt von $x_1, \ldots, x_m$), so ist die Funktion

$$(3) \qquad \omega_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + \omega_m \frac{\partial F}{\partial x_m} \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_m) \quad (F)$$

stets als Polynom $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ darstellbar.

Alle diese Polynome bezeichnen wir als zu F adjungiert.

Der hiermit für beliebig viele Veränderliche formulierte Begriff liefert auch für $m = 2$ stets adjungierte Polynome im historischen Sinne [3]).

Unterwerfen wir (1) einer umkehrbaren linearen Transformation

$$x_\alpha = \sum_\beta u_{\alpha\beta} y_\beta \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

die das gegebene Gebilde in das andere $G(y_1, \ldots, y_m) = 0$ überführt, worin wieder G in allen Variablen regulär sei, so gehen die ganzen algebraischen Funktionen von $x_1, \ldots, x_m$ in solche von $y_1, \ldots, y_m$ über und umgekehrt. Wegen der Beziehungen

$$\frac{\partial G}{\partial y_\beta} = \sum_\alpha u_{\alpha\beta} \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}$$

geht dabei jedes adjungierte Polynom von F in ein solches von G über und umgekehrt.

Ist nun F nicht regulär in allen Variablen, so können wir als die zu F adjungierten Polynome diejenigen definieren, die vermöge linearer Transformationen aus den adjungierten Polynomen irgendeines mit F linear verwandten regulären G hervorgehen.

Da sich jede Größe des Körpers als Quotient von ganzen Größen darstellen läßt, und da insbesondere die Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_m}$ selbst zu den adjungierten Polynomen gehören, so ergibt sich vermöge (2) der

Satz 1: *Ist $F(x_1, \ldots, x_m) = 0$ eine irreduzible Gleichung, so läßt sich jede rationale Funktion des Körpers* mod F *als Quotient zweier adjungierter Polynome darstellen.*

---

[3]) Vergl. zu diesem Zwecke z. B. den Bericht von *E. Noether* im Band 28 der Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung S. 182—203, insbesondere S. 191 und 196. Indessen ergeben sich dabei nicht *stets*, wie dort behauptet, alle adjungierten Polynome im klassischen Sinne, sondern nur dann, wenn die Verzweigungsideale im Sinne von *Dedekind-Weber* (Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, dieses Journal Bd. 92 (1882)) für x_1 und x_2 keinen Teiler gemein haben.

Da, wie gesagt, die Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x_a}$ selbst zu den adjungierten Polynomen gehören, so ist das Singularitäten-Ideal

$$\mathfrak{S} = \left(F, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_m}\right)$$

ein Vielfaches des Ideals $\mathfrak{A}$ aller adjungierten Polynome. Umgekehrt gibt es aber einen Exponenten λ, so daß $\mathfrak{A}^\lambda \equiv 0\ (F)$ ist. Denn ist $\omega_1 \equiv \frac{\varphi_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}}$ eine ganze Funktion von $x_1, \ldots, x_m$, die einer Gleichung μ-ten Grades mit Polynomen als Koeffizienten und erstem Koeffizienten 1 genügt, so ergibt sich durch Multiplikation mit $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^\mu$ die Kongruenz $\varphi_1^\mu \equiv 0\ (\mathfrak{S})$. Analoges gilt für alle φ_a von der Form $\omega_a \frac{\partial F}{\partial x_a}$. Da sich aber aus diesen φ_a eine endliche Basis des Polynomideals $\mathfrak{A}$ zusammensetzen läßt, so gibt es eine Zahl λ von der Art, daß alle Produkte der Dimension λ von Faktoren φ zu $\mathfrak{S}$ gehören, womit die Behauptung bewiesen ist.

Satz 2: *Das Ideal $\mathfrak{A}$ der adjungierten Polynome steht zu dem Singularitätenideal $\mathfrak{S} = \left(F, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_m}\right)$ in der Beziehung, daß $\mathfrak{S}$ ein Vielfaches von $\mathfrak{A}$ und eine gewisse Potenz $\mathfrak{A}^\lambda$ von $\mathfrak{A}$ ein Vielfaches von $\mathfrak{S}$ ist. Demnach sind die gemeinsamen Nullstellen der adjungierten Polynome genau die singulären Punkte des Gebildes.*

2. Wir gehen nun dazu über, die Begriffe von Nr. 1 auf den Fall eines beliebigen Haupt-Primideals zu übertragen.

Es sei also $\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m) = (P_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, P_i(x_1, \ldots, x_m))$ ein Primideal in m Variablen von der Mannigfaltigkeit $r = m - i$, $P_1, \ldots, P_i$ eine Basis. Wir verlangen ferner, was durch eine vorherige lineare Transformation stets erreichbar ist, daß $x_1, \ldots, x_i$ ganze algebraische Funktionen mod $\mathfrak{P}$ von $x_{i+1}, \ldots x_m$ sind. Wir denken uns außerdem die Wahl des Koordinatensystems so getroffen, daß zu einem allgemeinen Wertsystem $x_{i+1}, \ldots, x_m$ vermöge $\mathfrak{P} = 0$ eine Anzahl von Wertsystemen

$$(4) \qquad \begin{matrix} x_1, \ldots\ldots, x_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(p-1)}, \ldots, x_i^{(p-1)} \end{matrix}$$

gehört, wobei $x_a, \ldots, x_a^{(p-1)}$ die Wurzeln einer in u_a regulären, zu $\mathfrak{P}(u_1, \ldots, u_i, x_{i+1}, \ldots, x_m)$ gehörigen Gleichung (der Resultante in bezug auf u_a)

$$R_a(u_a, x_{i+1}, \ldots, x_m) = (u_a - x_a) \cdots (u_a - x_a^{(p-1)})$$

sind, die im Körper aller rationalen Funktionen von $x_{i+1}, \ldots, x_m$ irreduzibel ist, so daß $x_a^{(\lambda)} \neq x_a^{(\varkappa)}$ wird für $\varkappa \neq \lambda$. Im Körper aller algebraischen Funktionen von $x_{i+1}, \ldots, x_m$ haben dann die Gleichungen $P_1 = 0, \ldots, P_i = 0$ p getrennte einfache Wurzeln. Unsere Behauptung lautet nun analog zu (2):

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial x_i} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \frac{\partial P_i}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P_i}{\partial x_i} \end{vmatrix} \omega \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_m) \quad (\mathfrak{P}),$$

wenn ω eine beliebige ganze Größe mod $\mathfrak{P}$ und φ ein Polynom in $x_1, \ldots, x_m$ bedeutet.

Zum Beweise setzen wir:

$$P_\alpha(u_1, \ldots, u_i, x_{i+1}, \ldots, x_m) = g_{\alpha 1}(u_1 - x_1) + \cdots + g_{\alpha i}(u_i - x_i),$$

wobei

$$(6)\qquad g_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_\beta}((u_1 - x_1), \ldots, (u_i - x_i))$$

ist [4]). Ersetzt man in dieser Formel $x_1, \ldots, x_i$ durch $x_1', \ldots, x_i'$, so bleibt die linke Seite ungeändert und wir erhalten:

$$(7)\quad P_\alpha(u_1, \ldots, u_i, x_{i+1}, \ldots, x_m) = g'_{\alpha 1}(u_1 - x_1') + \cdots + g'_{\alpha i}(u_i - x_i')$$

mit

$$g'_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_\beta'}((u_1 - x_1'), \ldots, (u_i - x_i')).$$

Analoges gilt für alle Wurzeln.

Wir bezeichnen nun die Determinanten

$$|g_{\alpha\beta}| \text{ mit } D(u_1, \ldots, u_i), \quad |g'_{\alpha\beta}| \text{ mit } D'(u_1, \ldots, u_i), \ldots$$

und finden, daß wegen der Symmetrie der Ausdruck

$$(8)\qquad D(u_1, \ldots, u_i)\,\omega + D'(u_1, \ldots, u_i)\,\omega' + \cdots$$

ein Polynom in $u_1, \ldots, u_i$ mit Koeffizienten wird, die rational in $x_{i+1}, \ldots, x_m$ sind. Da aber jeder Summand von (8) ganze algebraische Funktionen von $x_{i+1}, \ldots, x_m$ als Koeffizienten von $u_1, \ldots, u_i$ besitzt, so ist (8) ein Polynom $\varphi(u_1, \ldots, u_{i+1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)$.

Andererseits gilt für $u_1 = x_1, \ldots, u_i = x_i$ offenbar $D' = 0, \ldots$; denn die linken Seiten von (7) verschwinden für diese Werte, und rechts sind nicht alle Differenzen 0. Hiermit ist bewiesen, daß vermöge $\mathfrak{P} = 0$:

$$D(x_1, \ldots, x_i)\,\omega = \varphi(x_1, \ldots, x_m),$$

also wegen (6) die Behauptung (5) gilt.

Analoges gilt bei Bevorzugung von i anderen der Variablen $x_1, \ldots, x_m$, so daß allgemein:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_{\alpha_1}} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial x_{\alpha_i}} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \frac{\partial P_i}{\partial x_{\alpha_1}} & \cdots & \frac{\partial P_i}{\partial x_{\alpha_i}} \end{vmatrix} \omega \equiv \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_i}(x_1, \ldots, x_m) \quad (\mathfrak{P})$$

gilt.

[4]) Vgl. hierzu etwa: *Netto*, Vorlesungen über Algebra, Bd. III, S. 169—170.

Alle diese Polynome

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) \equiv \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_i} \begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_{\alpha_1}} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial x_{\alpha_i}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial P_i}{\partial x_{\alpha_1}} & \cdots & \frac{\partial P_i}{\partial x_{\alpha_i}} \end{vmatrix} \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_i} \quad (\mathfrak{P})$$

bezeichnen wir als zu $\mathfrak{P}$ *adjungiert.*

Dieser Begriff erweist sich wieder gegenüber linearen Transformationen als invariant, wenn er für den Fall, daß die $x_1, \ldots, x_i$ nicht ganz algebraisch sind, analog zu Nr. 1 mit Hilfe einer linearen Transformation in ein Gebilde, für das diese Größen ganz sind, definiert wird. Es gilt dann wieder

Satz 3: *Ist* $\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m)$ *ein Haupt-Primideal, so läßt sich jede rationale Funktion des Körpers* mod $\mathfrak{P}$ *als Quotient zweier adjungierter Polynome darstellen.*

Satz 4: *Das Ideal* $\mathfrak{A}$ *der adjungierten Polynome* mod $\mathfrak{P}$ *steht zu dem Singularitätenideal* $\mathfrak{S} = \left(\mathfrak{P}, \left|\frac{\partial P_\alpha}{\partial x_\beta}\right|\right)$, *das durch alle i-reihigen Determinanten*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_{\alpha_1}} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial x_{\alpha_i}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial P_i}{\partial x_{\alpha_1}} & \cdots & \frac{\partial P_i}{\partial x_{\alpha_i}} \end{vmatrix}$$

erzeugt wird, in der Beziehung, daß $\mathfrak{S}$ *ein Vielfaches von* $\mathfrak{A}$ *und eine gewisse Potenz* $\mathfrak{A}^\lambda$ *von* $\mathfrak{A}$ *ein Vielfaches von* $\mathfrak{S}$ *ist. Demnach sind die gemeinsamen Nullstellen aller adjungierten Polynome genau die singulären Punkte des Gebildes.*

Der Beweis verläuft völlig analog wie in Nr. 1.

§ 2.

Das Verhalten der adjungierten Polynome bei affinrationalen, projektiven und birationalen Transformationen.

3. Das Gebilde (1) von Nr. 1 sei affinrational verwandt mit dem Gebilde

$$G(y_1, \ldots, y_m) = 0, \quad (9)$$

so daß also insbesondere vermöge

$$x_\alpha = g_\alpha(y_1, \ldots, y_m) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m) \quad (10)$$

für gewisse Polynome $g_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, g_m(y_1, \ldots, y_m)$ die Beziehung

$$F(g_1, \ldots, g_m) = MG \quad (11)$$

besteht. Aus ihr ergibt sich durch Differentiation

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial F}{\partial g_\alpha} \cdot \frac{\partial g_\alpha}{\partial y_\beta} \equiv M \frac{\partial G}{\partial y_\beta} \quad (G)$$

$$\frac{\partial F}{\partial g_\alpha} \cdot \left| \frac{\partial g_\alpha}{\partial y_\beta} \right| \equiv M \sum_{\beta} D_{\alpha\beta} \frac{\partial G}{\partial y_\beta} \quad (G) \tag{12}$$

mit gewissen Polynomen $D_{\alpha\beta}$.

Es sei nun $\omega = \chi(x_1, \ldots, x_m)$ irgendeine ganze algebraische Funktion von $x_1, \ldots, x_m \bmod F$. Dann ist vermöge (10) die Funktion $\chi(g_1, \ldots, g_m)$ eine ganze algebraische Funktion von $y_1, \ldots, y_m \bmod G$, da aus der Gleichung

$$\omega^\mu + a_1(x_2, \ldots, x_m)\omega^{\mu-1} + \cdots + R_\mu(x_2, \ldots, x_m) = 0$$

mit den Polynomen $a_1, \ldots, a_\mu$ als Koeffizienten durch die Substitution (10) eine Gleichung resultiert, die $\omega(g)$ als ganze algebraische Funktion $\bmod G$ zeigt.

Die Gesamtheit aller ganzen algebraischen Funktionen bleibt also bei affinrationalen Transformationen invariant erhalten.

Multipliziert man daher die Kongruenz (12) mit $\omega(x) = \omega(g)$, so erscheint links ein zu F adjungiertes Polynom $\varphi(x) = \varphi(g)$, rechts ein zu G adjungiertes Polynom $\psi(y_1, \ldots, y_m)$, und es wird

$$\varphi(g_1, \ldots, g_m) \left| \frac{\partial G_\alpha}{\partial y_\beta} \right| \equiv M\psi \quad (G). \tag{13}$$

Nun habe ich in einer früheren Arbeit [5]) bewiesen, daß die Übergangssubstitutionen g_α so gewählt werden können, daß die Determinante $\left| \frac{\partial g_\alpha}{\partial y_\beta} \right|$ auf dem Gebilde von G in je endlich vielen vorgegebenen Punkten nicht verschwindet. Ist daher $\mathfrak{B}$ das durch alle adjungierten Polynome von G erzeugte Polynomideal, so ist bei geeigneter Wahl der g_α die Determinante zu keinem der zugehörigen Primideale von $\mathfrak{B}$ gehörig. Demnach ergibt (13):

$$\varphi(g_1, \ldots, g_m) \equiv 0 \quad (\mathfrak{B}). \tag{14}$$

Analog verfahren wir im Falle zweier affinrational verwandter Haupt-Primideale $\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m)$ und $\mathfrak{Q}(y_1, \ldots, y_m)$. Wir haben dann analog zu (11) die Gleichungen

$$P_\alpha(g_1, \ldots, g_m) = \sum_{\varkappa=1}^{i} A_{\alpha\varkappa} Q_\varkappa \qquad (\alpha = 1, \ldots, i)$$

wobei $Q_1, \ldots, Q_i$ eine Basis von $\mathfrak{Q}$ bedeutet. Durch Differentiation ergibt sich hieraus

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial P_\alpha}{\partial g_\lambda} \cdot \frac{\partial g_\lambda}{\partial y_\beta} \equiv \sum_{\varkappa} A_{\alpha\varkappa} \frac{\partial Q_\varkappa}{\partial y_\beta} \quad (\mathfrak{Q}).$$

In Matrizen-Darstellung geschrieben und in geeigneter Weise ergänzt, ergibt diese Gleichung

---

[5]) Über die Singularitäten algebraischer Gebilde, Mathematische Annalen Bd. 81 (1920), S. 223—234, insbesondere S. 229—230.

$$\left\|\begin{matrix}\frac{\partial P_1}{\partial g_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial g_m}\\ \cdots & & \cdots\\ \frac{\partial P_i}{\partial g_1} & \cdots & \frac{\partial P_i}{\partial g_m}\\ 0 \cdots 1 & \cdots & 0\\ \cdots & & \cdots\\ 0 & \cdots & 1\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix}\frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}\\ & \cdots & \\ & \cdots & \\ & \cdots & \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m}\end{matrix}\right\| \equiv \left\|\begin{matrix}A_{11} \cdots A_{1i}\ 0 \cdots 0\\ A_{i1} \cdots A_{ii}\ 0 \cdots 0\\ 0 \cdots\ 0\ \ 1 \cdots 0\\ \cdots\\ 0 \cdots\cdots\ 1\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix}\frac{\partial Q_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial y_m}\\ \cdots & & \cdots\\ \frac{\partial Q_i}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial Q_i}{\partial y_m}\\ \frac{\partial g_{i+1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_{i+1}}{\partial y_m}\\ \cdots & & \cdots\\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m}\end{matrix}\right\| \quad (\mathfrak{Q}).$$

Hieraus folgt durch Determinantenbildung für $M = \left|\begin{matrix}A_{11} \cdots A_{1i}\\ \cdots\\ A_{ii} \cdots A_{ii}\end{matrix}\right|$:

$$\left|\begin{matrix}\frac{\partial P_1}{\partial g_1} \cdots \frac{\partial P_1}{\partial g_i}\\ \cdots\\ \frac{\partial P_i}{\partial g_1} \cdots \frac{\partial P_i}{\partial g_i}\end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix}\frac{\partial g_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial g_1}{\partial y_m}\\ \cdots\\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial g_m}{\partial y_m}\end{matrix}\right| \equiv M\overline{\psi} \quad (\mathfrak{B}),$$

$$\equiv 0 \qquad (\mathfrak{T})$$

wenn $\mathfrak{T}$ das durch Adjunktion aller i-reihigen Determinanten $\left|\frac{\partial Q_\alpha}{\partial y_\beta}\right|$ zu $\mathfrak{Q}$ entstehende Singularitätenideal für $\mathfrak{Q}$ bedeutet. Multiplikation mit irgendeiner ganzen Funktion $\omega(x_1, \ldots, x_m) = \omega(g_1, \ldots, g_m)$ ergibt daher nach (5) linkerhand $\varphi(g_1, \ldots, g_m)\left|\frac{\partial g_\alpha}{\partial y_\beta}\right|$, wobei $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ zu $\mathfrak{P}$ adjungiert ist, rechts aber ebenfalls in $M\psi$ ein zu $\mathfrak{Q}$ adjungiertes Polynom $\psi(y_1, \ldots, y_m)$, da $\omega(g_1, \ldots, g_m)$ auch ganz in $y_1, \ldots, y_m$ mod $\mathfrak{Q}$ ist. Wiederum schließen wir wie oben, daß bei geeigneter Wahl der g_α die Determinante $\left|\frac{\partial g_\alpha}{\partial y_\beta}\right|$ zu keinem der zugehörigen Primideale des adjungierten Ideals $\mathfrak{B} = (\mathfrak{T}, \psi)$ gehört und folglich auch hier die Kongruenz (14) gilt.

Es gilt demnach allgemein der

Satz 5: *Sind die Haupt Primideale $\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m)$ und $\mathfrak{Q}(y_1, \ldots, y_m)$ affinrational verwandt, so sind auch die zugehörigen adjungierten Polynomideale $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ miteinander affinrational verwandt.*

Wir können den letzten Satz leicht auch auf denjenigen Fall ausdehnen, wo es sich um zwei affinrational verwandte Hauptprimideale $\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m)$ und $\mathfrak{Q}(y_1, \ldots, y_n)$ mit $n > m$ handelt. Nehmen wir etwa die Übergangssubstitutionen

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1\\
&\cdots\\
y_m &= x_m\\
y_{m+1} &= a_n x_1 + \cdots + a_{1m} x_m = f_1(x_1, \ldots, x_m)\\
&\cdots\\
y_n &= a_{n-m,1} x_1 + \cdots + a_{n-m,m} x_m = f_{n-m}(x_1, \ldots, x_m),
\end{aligned}$$

so ist

$$\overline{\mathfrak{Q}}(y_1, \ldots, y_n) = \mathfrak{P}(y_1, \ldots, y_m),\quad y_{m+1} - f_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots,\ y_n - f_{n-m}(y_1, \ldots, y_m)$$

ein zu $\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m)$ affinrational verwandtes Haupt-Primideal im Raume von n Dimensionen. Es ist leicht einzusehen, daß das Ideal $\mathfrak{S}$, das aus allen i-reihigen Determinanten $\left|\frac{\partial P_\alpha}{\partial x_\beta}\right|$ erzeugt wird, in das Ideal $\overline{\mathfrak{T}}$ aller $(i + n - m)$-reihigen Determinanten $\left|\frac{\partial \overline{Q}_\alpha}{\partial y_\beta}\right|$ übergeht und umgekehrt. Da auch die ganzen Größen mod $\mathfrak{P}$ und mod $\overline{\mathfrak{Q}}$ ineinander übergehen, so ergibt sich affinrationale Verwandtschaft der adjungierten Ideale $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ und damit durch Übergang zu einem beliebigen affinrational verwandten Haupt-Primideal $\mathfrak{Q}$ im Raume von n Dimensionen gemäß Satz 5 die folgende Erweiterung dieses Satzes:

Satz 6: *Sind* $\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m)$ und $\mathfrak{Q}(y_1, \ldots, y_n)$ *zwei affinrational verwandte Haupt-Primideale in Räumen gleicher oder verschiedener Dimensionszahl, so sind die zugehörigen adjungierten Polynomideale* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *ebenfalls zueinander affinrational verwandt.*

Wir bilden nunmehr die *Hentzelt*sche Resultante[6]) der beiden Polynomideale $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{A}$, die nach den Sätzen von *Hentzelt-Noether* entsprechend der Zerlegung des singulären Gebildes von $\mathfrak{P}$ in Teilmannigfaltigkeiten 0-ter bis $(r-1)$-ter Dimension in die entsprechenden Teilresultanten zerfallen. Da bei affinrationaler Transformation die Exponenten der einzelnen irreduziblen Faktoren, die „Vielfachheiten" der zugehörigen irreduziblen Gebilde, ungeändert bleiben, so gilt dies also insbesondere auch für die Ideale $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ bzw. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Ist speziell $m = 2$, so ist nur je eine einzige Teilresultante für $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{A}$ vorhanden, die von einer Variablen abhängt und daher in Linearfaktoren zerfällt. Die Exponenten der verschiedenen Linearfaktoren und damit der Grad der beiden Resultanten sind somit affinrationale Invarianten. Nun bedeutet aber bei unseren Voraussetzungen, wenn $R^2(x_1)$ die Norm des Ideals $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right)$ im Bereiche aller ganzen Funktionen oder anders ausgedrückt den *Kronecker*schen außerwesentlichen Diskriminantenteiler der Kurvengleichung darstellt[7]), die Resultante von $\mathfrak{A}$ genau das Polynom $R(x_1)$ selbst. Denn vermöge der Auflösung eines beliebigen singulären Punktes in gewöhnliche Doppelpunkte ergibt sich allgemein, was für gewöhnliche Doppelpunkte ohne weiteres evident ist, daß nämlich die Anzahl der linearen Bedingungen, die den Koeffizienten einer adjungierten Kurve in bezug auf den betrachteten singulären Punkt auferlegt sind, gleich der Hälfte der Schnittpunktsmultiplizität einer allgemeinen adjungierten Kurve mit der Grundkurve, soweit der betreffende Punkt dazu beiträgt, ist. Diese Schnittpunktsmultiplizität ist aber der Exponent des betreffenden Linearfaktors von $R^2(x_1)$, das sich ja als

---

[6]) Vgl. *Hentzelt-Noether,* Zur Theorie der Polynomideale und Resultanten, Mathematische Annalen Bd. 88 (1922), S. 53—79.

[7]) Abgesehen von dem in Anmerkung [3]) S. 21 charakterisierten Ausnahmefalle eines gemeinsamen Teilers zwischen den beiden Verzweigungsidealen für x_1 und x_2.

derjenige Bestandteil der Resultante der Grundkurve mit einer allgemeinen adjungierten Kurve deuten läßt, der auf die singulären Punkte Bezug hat; die Anzahl der Bedingungen für eine adjungierte Kurve ist also in bezug auf jeden singulären Punkt gleich dem betreffenden Exponenten von $R(x_1)$, und somit ist dieses Polynom die Resultante von $\mathfrak{A}$.

Es ist also hiermit einerseits die affinrationale Invarianz des Grades und der einzelnen Exponenten von $R(x_1)$ aufgezeigt[8]), andererseits in der *Hentzelt*schen Resultante von $\mathfrak{A}$ eine ebenfalls in obigem Sinne affinrational invariante Verallgemeinerung von $R(x_1)$ von ebenen Kurven auf beliebige Haupt-Primideale gewonnen.

Satz 7: *Die Grade und Exponenten der irreduziblen Faktoren der Hentzeltschen Resultante von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{A}$ sind affinrationale Invarianten. Für $m = 2$ geht die Resultante von $\mathfrak{A}$ im allgemeinen in das Polynom $R(x_1)$ über, dessen Quadrat der Kroneckersche außerwesentliche Diskriminantenteiler der Kurvengleichung ist; der Grad und die Exponenten der einzelnen Linearfaktoren von $R(x_1)$ sind ebenfalls affinrational invariant.*

4. Wir führen jetzt homogene Koordinaten ein, indem wir x_a durch $\frac{x_a}{x_0}$ ersetzen und jedesmal mit einer geeigneten Potenz von x_0 multiplizieren. Es sei $\overline{\mathfrak{P}}(x_0, \ldots, x_m)$ das hierbei aus $\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m)$ entstehende Formenideal, $\overline{P_1}, \ldots, \overline{P_i}$ ein System von Basisformen von den Dimensionen $m_1, \ldots, m_i$. Setzen wir nun

$$x_\alpha = \sum_{\beta=0}^{m} u_{\alpha\beta} y_\beta = g_\alpha(y_0, \ldots, y_m) \qquad (\alpha = 0, \ldots, m)$$

in $\overline{\mathfrak{P}}(y_0, \ldots, y_m)$ ein, so ergebe sich das Formenideal $\overline{\mathfrak{Q}}(y_0, \ldots, y_m)$. Für jede i-reihige Determinante gilt alsdann, daß $\left|\frac{\partial \overline{P_\alpha}}{\partial g_\beta}\right|$ als mod $\overline{\mathfrak{Q}}$ Summe von i-reihigen Determinanten $\left|\frac{\partial \overline{Q_\alpha}}{\partial y_\beta}\right|$ darstellbar ist, wobei $\overline{Q_1}, \ldots, \overline{Q_i}$ die entsprechenden Basisformen von $\overline{\mathfrak{Q}}$ bedeuten.

Ist nun $\chi(x_1, \ldots, x_m)$ eine rationale Funktion, $\omega = \chi\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_m}{x_0}\right) = \frac{\chi_1(x_0, \ldots, x_m)}{\chi_2(x_0, \ldots, x_m)}$ mit den Formen χ_1 und χ_2 eine ganze Größe mod $\mathfrak{P}\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_m}{x_0}\right)$, also

$$(15) \qquad \omega \left|\frac{\partial P_\alpha}{\partial\left(\frac{x_\beta}{x_0}\right)}\right| \equiv \varphi\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_m}{x_0}\right) \qquad \left(\mathfrak{P}\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_m}{x_0}\right)\right) \quad (1 \leqq \beta \leqq m),$$

und $\varphi\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_m}{x_0}\right)$ ein adjungiertes Polynom, so ist wegen $x_0^{m_\alpha} P_\alpha\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_m}{x_0}\right)$

[8]) Der allgemeine Beweis der affinrationalen Invarianz der Grade und Exponenten von $R(x_1)$ erfolgt am einfachsten im Anschluß an die Definition des Ideals k bei *Dedekind-Weber* a. a. O. als Führer des Ringes aller Polynome von x_1 und x_2. Vgl. eine demnächst in der Mathem. Zeitschrift erscheinende Arbeit der Verfassers.

$= \overline{P}_\alpha(x_0, \ldots, x_m)$ die Ableitung $\dfrac{\partial \overline{P_\alpha}}{\partial x_\beta} = x_0^{m_\alpha - 1} \dfrac{\partial P_\alpha}{\partial\left(\dfrac{x_\beta}{x_0}\right)}$, also die Determinante

$$\left|\frac{\partial \overline{P_\alpha}}{\partial x_\beta}\right| = x_0^{m_1 + \cdots + m_i - i} \left|\frac{\partial P_\alpha}{\partial\left(\frac{x_\alpha}{x_0}\right)}\right| .$$

Ist daher φ vom Grade σ und $x_0^\sigma \varphi\left(\dfrac{x_1}{x_0}, \ldots, \dfrac{x_m}{x_0}\right) = \overline{\varphi}(x_0, \ldots, x_m)$, so ergibt die Multiplikation von (15) mit $x_0^{m_1 + \cdots + m_i - i}$, daß für einen gewissen Exponenten $\lambda \geqq 0$

$$(16) \qquad x_0^\lambda \overline{\varphi}(x_0, \ldots, x_m) \equiv \frac{\chi_1(x_0, \ldots, x_m)}{\chi_2(x_0, \ldots, x_m)} \cdot \left|\frac{\partial \overline{P_\alpha}}{\partial x_\beta}\right| \quad (\overline{\mathfrak{P}})$$

gilt. Diese Kongruenz gilt nun bei entsprechender Wahl von λ auch, wenn unter den Indizes β der Wert Null vorkommt; denn wegen

$$x_0 \frac{\partial \overline{P_\alpha}}{\partial x_0} \equiv - x_1 \frac{\partial \overline{P_\alpha}}{\partial x_1} - \cdots - x_m \frac{\partial \overline{P_\alpha}}{\partial x_m} \quad (\overline{\mathfrak{P}})$$

ist das Produkt

$$\frac{\chi_1(x_0, \ldots, x_m)}{\chi_2(x_0, \ldots, x_m)} \cdot x_0 \cdot \left|\frac{\partial \overline{P_\alpha}}{\partial x_\beta}\right| \equiv x_0^\lambda \overline{\varphi}(x_0, \ldots, x_m) \quad (\overline{\mathfrak{P}}),$$

wobei $\overline{\varphi}$ eine adjungierte Form ist. In jedem Falle folgt also hieraus für ein gewisses $\lambda \geqq 0$ das Bestehen der Kongruenz (16).

Multipliziert man also den Ausdruck von $\left|\dfrac{\partial \overline{P_\alpha}}{\partial g_\beta}\right|$ durch t-reihige Determinanten $\left|\dfrac{\partial \overline{Q_\alpha}}{\partial y_\beta}\right|$ mit ω, so ergibt sich

$$g_0^\lambda \overline{\varphi}(g_0, \ldots, g_m) \equiv \frac{\chi_1(g_0, \ldots, g_m)}{\chi_2(g_0, \ldots, g_m)} \cdot \sum c \cdot \left|\frac{\partial \overline{Q_\alpha}}{\partial y_\beta}\right| \quad (\overline{\mathfrak{Q}}) .$$

Nun ist für eine gewisse Potenz $\left(\dfrac{g_0}{y_0}\right)^\varrho$ das Produkt $\left(\dfrac{g_0}{y_0}\right)^\varrho \cdot \dfrac{\chi_1(g_0, \ldots, g_m)}{\chi_2(g_0, \ldots, g_m)}$ eine ganze Größe mod $\mathfrak{Q}\left(\dfrac{y_1}{y_0}, \ldots, \dfrac{y_m}{y_0}\right)$; es gilt also in jedem Falle für einen bestimmten Exponenten $\tau \geqq 0$

$$g_0^\tau \overline{\varphi}(g_0, \ldots, g_m) \equiv 0 \quad (\overline{\mathfrak{B}}),$$

wenn $\overline{\mathfrak{B}}$ das aus allen adjungierten Formen mod $\overline{\mathfrak{Q}}$ erzeugte Formenideal ist.

Setzen wir nun voraus, das weder auf $x_0 = 0$ ein zugehöriges irreduzibles singuläres Gebilde von $\overline{\mathfrak{P}}$ gelegen ist, noch auf $y_0 = 0$ ein solches von $\overline{\mathfrak{Q}}$, so kann auch auf $g_0 = 0$ kein zugehöriges singuläres Gebilde von $\overline{\mathfrak{Q}}$ liegen, und daher ergibt die letzte Kongruenz, daß $\overline{\varphi}(g_0, \ldots, g_m)$ selbst zu $\overline{\mathfrak{B}}$ gehört, und in demselben Sinne gilt die Umkehrung. Die beiden adjungierten Formenideale $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ gehen also ineinander über.

Liegt aber auf $x_0 = 0$ ein zugehöriges singuläres irreduzibles Gebilde von $\overline{\mathfrak{P}}$, so definieren wir nunmehr die adjungierten Formen nicht durch einfaches Homogenisieren der unhomogenen adjungierten Polynome, sondern vermöge linearer Transformation durch diejenigen Formen, die sich aus den adjungierten Formen eines solchen $\overline{\Omega}$ ergeben, für das auf $y_0 = 0$ keine singulären irreduziblen Gebilde liegen. Mit diesen Festsetzungen gilt nun allgemein der

Satz 8: *Der Begriff der adjungierten Formen* mod $\mathfrak{P}$ *ist in bezug auf homogene lineare Transformationen der Variablen invariant.*

5. Wir gehen nunmehr zu allgemeinen birationalen Transformationen über. Es sei $\overline{\Omega}(y_0, \ldots, y_m)$ ein zu $\overline{\mathfrak{P}}$ birational verwandtes Hauptprimideal. Dann gilt mit den Transformationsgleichungen vom gemeinsamen Grade t:

$$x_\alpha = g_\alpha(y_0, \ldots, y_m) \qquad (\alpha = 0, \ldots, m)$$

wenn $\overline{Q_1}, \ldots, \overline{Q_i}$ eine Basis von $\overline{\Omega}$ bedeutet,

$$\overline{P_\alpha}(g_0, \ldots, g_m) = \sum_{\varkappa=1}^{i} A_{\alpha\varkappa}\overline{Q_\varkappa} \tag{17}$$

und

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial \overline{P_\alpha}}{\partial g_\lambda}\frac{\partial g_\lambda}{\partial y_\beta} \equiv \sum_{\varkappa} A_{\alpha\varkappa}\frac{\partial \overline{Q_\varkappa}}{\partial y_\beta} \quad (\overline{\Omega}). \tag{18}$$

Aus (17) folgt für die Grade m_α von $\overline{P_\alpha}$, $n_\varkappa$ von $\overline{Q_\varkappa}$, $\mu_{\alpha\varkappa}$ von $A_{\alpha\varkappa}$:

$$m_\alpha t = \mu_{\alpha\varkappa} + n_\varkappa . \tag{17 a}$$

In geeigneter Weise ergänzt kann dies System in der Form geschrieben werden:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \overline{P_1}}{\partial g_0} & \cdots & \frac{\partial \overline{P_1}}{\partial g_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \overline{P_i}}{\partial g_0} & \cdots & \frac{\partial \overline{P_i}}{\partial g_m} \\ 0 \cdots 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{\partial g_0}{\partial y_0} & \cdots & \frac{\partial g_0}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_0} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} \end{matrix} \right\| \equiv \left\| \begin{matrix} A_{11} \cdots A_{1i}\ 0 \cdots 0 \\ \cdots \\ A_{i1} \cdots A_{ii}\ 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0\ \ 1 \cdots 0 \\ \cdots \\ 0 \cdots \cdots 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \overline{Q_1}}{\partial y_0} & \cdots & \frac{\partial \overline{Q_1}}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \overline{Q_i}}{\partial y_0} & \cdots & \frac{\partial \overline{Q_i}}{\partial y_m} \\ \frac{\partial g_i}{\partial y_0} & \cdots & \frac{\partial g_i}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_0} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} \end{matrix} \right\| \quad (\overline{\Omega})$$

und ergibt alsdann durch Determinantenbildung

$$\left|\frac{\partial \overline{P_\alpha}}{\partial g_\beta}\right| \cdot \left|\frac{\partial g_\alpha}{\partial y_\beta}\right| \equiv |A_{\alpha\beta}| \cdot B \quad (\overline{\Omega}), \tag{19}$$

wobei B eine Summe von Determinanten $\left|\frac{\partial \overline{Q_\alpha}}{\partial y_\beta}\right|$, jede multipliziert mit gewissen Formen bedeutet.

Es enthält nun keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir voraussetzen, daß auf $x_0 = 0$ keine zugehörigen irreduziblen singulären Gebilde von $\mathfrak{P}$

liegen sollen; die Multiplikation von (19) mit einer in bezug auf das vermöge $x_0 = 1$ aus $\overline{\mathfrak{P}}$ entstehende Polynomideal $\mathfrak{P}$ ganzen Größe $\omega = \frac{\chi_1(x_0, \ldots, x_m)}{\chi_2(x_0, \ldots, x_m)} = \frac{\chi_1(g_0, \ldots, g_m)}{\chi_2(g_0, \ldots, g_m)}$ und mit einer gewissen Potenz $\left(\frac{g_0}{y_0}\right)^\varrho$ ergibt dann, da dies Produkt eine ganze Größe in bezug auf das aus $\overline{\mathfrak{Q}}$ durch $y_0 = 1$ entstehende Polynomideal $\mathfrak{Q}$ ist,

$$(20) \qquad g_0^\tau \, \overline{\varphi}(g_0, \ldots, g_m) \left| \frac{\partial g_\alpha}{\partial y_\beta} \right| \equiv |A_{\alpha\beta}| \cdot \overline{\psi}^*(y_0, \ldots, y_m) \quad (\overline{\mathfrak{Q}}) .$$

Hierbei ist $\overline{\varphi}(x_0, \ldots, x_m)$ zu $\overline{\mathfrak{P}}$, $\overline{\psi}^*(y_0, \ldots, y_m)$ zu $\overline{\mathfrak{Q}}$ adjungiert. Es ist daher

$$(21) \qquad g_0^\tau \, \overline{\varphi}(g_0, \ldots, g_m) \cdot \left| \frac{\partial g_\alpha}{\partial y_\beta} \right| \equiv 0 \; (\overline{\mathfrak{B}}) .$$

Nun setzen wir voraus, daß auch auf $g_0 = 0$ kein zugehöriges irreduzibles singuläres Gebilde von $\mathfrak{Q}$ liege; diese Voraussetzung kann vermöge einer vorherigen allgemeinen linearen homogenen Transformation der Variablen dann als erfüllt angesehen werden, wenn nicht alle Flächen $g_\alpha = 0$ ein irreduzibles singuläres Gebilde von $\overline{\mathfrak{Q}}$ enthalten. Wir können unter dieser Annahme schließen, daß

$$(22) \qquad \overline{\varphi}(g_0, \ldots, g_m) \cdot \left| \frac{\partial g_\alpha}{\partial y_\beta} \right| \equiv 0 \; (\overline{\mathfrak{B}})$$

ist.

Andererseits folgt aus (20) auch

$$g_0^\tau \, \overline{\varphi}(g_0, \ldots, g_m) \cdot \left| \frac{\partial g_\alpha}{\partial y_\beta} \right| \equiv 0 \; (\overline{\mathfrak{Q}}, \; |A_{\alpha\beta}|) .$$

Nehmen wir an, daß nicht alle g_α mit $(\overline{\mathfrak{Q}}, \; |A_{\alpha\beta}|)$ ein irreduzibles Gebilde gemeinsam haben, so läßt sich analog wie oben voraussetzen, daß g_0 kein solches mit $(\overline{\mathfrak{Q}}, \; |A_{\alpha\beta}|)$ gemeinsam hat. Alsdann folgt aus der letzten Gleichung

$$(23) \qquad \overline{\varphi}(g_0, \ldots, g_m) \cdot \left| \frac{\partial g_\alpha}{\partial y_\beta} \right| \equiv 0 \; (\overline{\mathfrak{Q}}, |A_{\alpha\beta}|) .$$

Sind endlich die beiden Ideale $\overline{\mathfrak{B}}$ und $(\overline{\mathfrak{Q}}, \; |A_{\alpha\beta}|)$ gegenseitig relativ prim, so ist ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches das Produkt. Alsdann folgt aus (22) und (23):

$$(24) \qquad \overline{\varphi}(g_0, \ldots, g_m) \cdot \left| \frac{\partial g_\alpha}{\partial y_\beta} \right| \equiv |A_{\alpha\beta}| \cdot \overline{\psi}(y_0, \ldots, y_m) \quad (\overline{\mathfrak{Q}}).$$

Ist nun a der Grad von $\overline{\varphi}$, b der Grad von $\overline{\psi}$, so folgt aus (22) und (17a):

$$a\,t + (t-1)(m+1) = \mu_{11} + \cdots + \mu_{ii} + b = (m_1 + \cdots + m_i)\,t - (n_1 + \cdots + n_i) + b,$$

$$b = t\,(a - m_1 - \cdots - m_i + m + 1) + n_1 + \cdots + n_i - m - 1 .$$

Wählen wir $a = m_1 + \cdots + m_i - m - 1$, so wird $b = n_1 + \cdots + n_i - m - 1$ von t unabhängig. Die Gleichung (24) zeigt alsdann, daß, wenn adjungierte Formen dieser Dimension $m_1 + \cdots + m_i - m - 1$ für $\mathfrak{P}$ existieren, auch adjungierte Formen der Dimension $n_1 + \cdots + n_i - m - 1$ für $\overline{\mathfrak{Q}}$ vorhanden sind und daß die Maximalanzahl p der linear unabhängigen Formen für beide Scharen übereinstimmt.

Im Falle ebener Kurven und Flächen im dreidimensionalen Raume geht diese Anzahl, falls die oben eingeführten adjungierten Formen alle diese Formen erschöpfen, in die bekannten birationalen Invarianten des Geschlechtes der Kurve und des geometrischen Geschlechtes der Fläche über; diese Begriffe sind also hiermit „im allgemeinen" auf beliebig viele Variable ausgedehnt. Eine genauere Präzisierung, wann dieser allgemeine Fall vorliegt, bedarf der vorherigen Einführung der Verzweigungsbegriffe bei beliebig vielen Veränderlichen, wofür auf die in Anmerkung [8]), S. 28 genannte Arbeit des Verfassers verwiesen werden muß.

Die Voraussetzungen für die Gültigkeit des obigen Beweises der birationalen Invarianz von p sind:

Die zugehörigen irreduziblen algebraischen Gebilde von $(\mathfrak{Q}, g_0, \ldots, g_m)$ enthalten

a) kein irreduzibles Gebilde von $\overline{\mathfrak{Q}}$,

b) kein Gebilde von $(\overline{\mathfrak{Q}}, |A_{\alpha\beta}|)$,

c) die irreduziblen singulären Gebilde von $\overline{\mathfrak{Q}}$ und die irreduziblen Gebilde von $(\overline{\mathfrak{Q}}, |A_{\alpha\beta}|)$ sind nicht ineinander enthalten.

Da die zugehörigen irreduziblen Gebilde von $(\overline{\mathfrak{Q}}, |A_{\alpha\beta}|)$ nach einem Satze von *Macaulay* von der Mannigfaltigkeit $r-1$ sind, so ist die Voraussetzung b) z. B. erfüllt, wenn $(\overline{\mathfrak{Q}}, g_0, \ldots, g_m)$ kein Gebilde der Dimension $r-1$ enthält.

Werden die analogen Voraussetzungen auch über die inversen Transformationen gemacht, so gilt demnach der

Satz 9: *Die Anzahl der linear unabhängigen adjungierten Formen der Dimension $m_1 + \cdots + m_i - m - 1$ eines Haupt-Primideals von Formen der Dimensionen $m_1, \ldots, m_i$ in $m+1$ homogenen Variablen ist eine Invariante gegenüber solchen birationalen Transformationen, die nebst ihren Umkehrungen den Voraussetzungen* a), b), c) *genügen.*

Breslau, den 17. Juni 1926.

Ordnungsbestimmungen in Integritätsbereichen und Newtonsche Polygone.

Von *Tonio Rella* in Graz.

Einleitung.

Unter den Irreduzibilitätskriterien für Polynome einer Veränderlichen mit ganzen rationalen Koeffizienten nimmt das *Eisenstein*sche und damit verwandte, welche auf der Betrachtung des einem Polynom zugeordneten *Newton*schen Polygons basieren, wegen ihrer Einfachheit eine hervorragende Stellung ein.

Im folgenden sollen diese Kriterien für allgemeine Integritätsbereiche erweitert werden, für welche eine Ordnungsbestimmung festgelegt werden kann [1]), und es sollen ferner Integritätsbereiche angegeben werden, in denen aus der möglichen Zerfällbarkeit infolge der Gestalt des *Newton*schen Polygons auf wirkliche Zerfällbarkeit geschlossen werden kann, welche Untersuchungen speziell für die Theorie der *Hensel*schen Körper von Wichtigkeit sind. Dabei soll die Theorie der *Newton*schen Polygone zurückgeführt werden auf die Möglichkeit, in einem Integritätsbereich unendlich viele Ordnungsbestimmungen anzugeben, die wir eben durch das Bild des *Newton*schen Polygons beherrschen.

§ 1. Ordnungsbestimmung in Integritätsbereichen.

Es liege ein abstrakt definierter Integritätsbereich I [2]) vor. Wir sagen, in I ist eine Ordnung bestimmt, wenn jedem Element a von I eine reelle Zahl $\{a\}$ oder das Symbol $+\infty$ derart zugeordnet ist, daß

$$(1) \qquad \{ab\} = \{a\} + \{b\}$$

$$(2) \qquad \{a+b\} = \{a\}, \quad \text{wenn } \{a\} < \{b\},$$
$$\geqq \{a\}, \quad \text{wenn } \{a\} = \{b\}.$$

Mit dem Symbol $+\infty$ soll dabei so gerechnet werden, wie es in der Theorie der reellen Funktionen üblich ist. Wenn es in I ein Element positiver Ordnung a gibt, so folgt aus (1) und (2) sofort $\{0\} = +\infty$. Denn

[1]) Vergleiche hierzu vor allem: *Kürschák*, Irreduzible Formen, d. J. Band 152, 1923 und *Rychlik*, Zur Bewertungstheorie der algebraischen Körper, d. J. Band 153, 1924.

[2]) Dieser soll immer ein Einheitselement für die Multiplikation besitzen, das durch 1 bezeichnet wird.

$\{a\} > 0\,, \quad \{a^n\} = n\{a\}$

$\{a^n + 0\} = \{a^n\} = n\{a\} \geqq \text{Min}\,(\{a^n\}, \{0\})$ für jedes natürliche n.

Daher

$n\{a\} \leqq \{0\}$ und, da $n\{a\}$ mit n über alle Grenzen wächst, $\{0\} = +\infty$.

Wir betrachten nur Ordnungsbestimmungen (kurz O. B.), für welche

(3) $\{0\} = +\infty$ und jedes nicht verschwindende Element eine endliche Ordnung besitzt [1]).

Aus (1) folgt sofort, daß $\{1\} = \{-1\} = 0$ und daher $\{a\} = \{-a\}$.

Die Gesamtheit der Elemente von I, deren Ordnung $\geqq 0$ ist, bilden einen Teilintegritätsbereich I^* (der eventuell auch mit I zusammenfallen kann), dessen Elemente ganz bezüglich dieser O. B. heißen sollen. Die Elemente von I mit der Ordnung Null sollen die Einheiten von I bezüglich dieser O. B. heißen. Das Produkt zweier Einheiten ist wieder eine Einheit.

Die Gesamtheit der Elemente, deren Ordnung $\geqq m$ $(> m)$ ist, bilden einen Modul $\mathfrak{O}_m(\mathfrak{O}_m^*)$, wobei gleichzeitig mit a und b auch $a - b$ und ca in diesem Modul liegt, wenn c irgendein ganzes Element von I ist.

Ist R der Körper, der aus I durch Quotientenbildung definiert werden kann, so gibt es eine O. B. in R, bei der die Ordnung aller Elemente von I ungeändert bleibt, nämlich

$$\left\{\frac{a}{b}\right\} = \{a\} - \{b\}\,.$$

§ 2. Äquivalenz.

Definition: Zwei Elemente a und b von I sollen bezüglich einer festgelegten O. B. äquivalent heißen (in Zeichen $a \sim b$), wenn entweder $a = b = 0$ oder $\{a\} = \{b\} < \{a - b\}$.

Diese Äquivalenzdefinition ist ersichtlich transitiv, symmetrisch und reflexiv und es gelten für sie folgende Sätze:

Satz 1. Aus $a \sim b$, $c \sim d$ folgt $ac \sim bd$.

Beweis: Wenn $a = b = 0$ oder $c = d = 0$, so ist auch $ac = bd = 0$.

Wenn alle vier Elemente von Null verschieden sind, so folgt

$\{ac\} = \{a\} + \{c\} = \{b\} + \{d\} = \{bd\}$

$\{ac - bd\} = \{a(c - d) + d(a - b)\} \geqq \text{Min}\,(\{a(c - d)\}, \{d(a - b)\})$

$= \text{Min}\,(\{a\} + \{c - d\}, \{d\} + \{a - b\}) > \{a\} + \{c\}$.

Satz 2. Aus $ac \sim bd$, $c \sim d$, $ac \neq 0$ folgt $a \sim b$.

Beweis: Aus $\{ac\} = \{bd\} = \{a\} + \{c\} = \{b\} + \{d\}$

und $\{c\} = \{d\}$ folgt

$\{a\} = \{b\}$.

---

[1]) Es scheiden damit Zuordnungen aus wie z. B. die folgende: I Gesamtheit aller ganzen rationalen Zahlen, $\{a\} = 0$, wenn a ungerade, $\{a\} + = \infty$, wenn a gerade. Die Bedingungen (1) und (2) sind dadurch ersichtlich erfüllt.

Wäre nun $\{a-b\}=\{a\}$, so würde daraus wegen $\{c-d\}>\{c\}$ folgen $\{ac-bd\}=\{a(c-d)+d(a-b)\}=\{a\}+\{c\}$ gegen die Voraussetzung. Daher ist $\{a-b\}>\{a\}$.

Satz 3. Aus $a\sim b$, $c\sim d$, $\{a+c\}=\{a\}$ folgt $a+c\sim b+d$.

Beweis: Es können wieder alle vier Elemente von Null verschieden angenommen werden, da sonst die Behauptung trivial ist.

Aus $\{a+c\}=\{a\}$ folgt $\{c\}\geqq\{a\}$.

Ferner ist $\{a-b\}>\{a\}$, $\{c-d\}>\{c\}\geqq\{a\}$, daher folgt aus

$\{a\}=\{a+c\}=\{(b+d)+(a-b)+(c-d)\}$, daß

$\{b+d\}=\{a+c\}=\{a\}$ und

$\{(a+c)-(b+d)\}=\{(a-b)+(c-d)\}>\{a\}=\{a+c\}$.

Dagegen läßt sich der Schluß nicht ziehen, wenn $\{a\}=\{c\}<\{a+c\}$, wie das Beispiel zeigt: I Bereich aller ganzen rationalen Zahlen, $\{a\}=a$, wenn 3^a die höchste Potenz von 3 ist, welche in a aufgeht. Es ist dann $4\sim 1$, $5\sim 2$, $4+5\not\sim 1+2$.

Definition: b soll ein Äquivalenzteiler von a heißen oder a ist durch b äquivalenzteilbar, wenn es ein Element c in I gibt, so daß $a\sim bc$.

Definition: Ein Element p von I soll bezüglich der vorgelegten O. B. ein Primelement heißen, wenn 1.) p kein Äquivalenzteiler von 1 ist, 2.) aus $ab\sim cp$ folgt, daß p ein Äquivalenzteiler von a oder b sein muß.

§ 3. Ordnungsbestimmungen von Polynomen.

Es sei wieder I ein Integritätsbereich, in dem eine O. B. festgelegt ist, x eine Unbestimmte, die nicht in I liegt, dann entsteht durch Adjunktion von x zu I der Integritätsbereich $I[x]$, der alle Polynome von x mit Koeffizienten aus I enthält. Es soll nunmehr nachgewiesen werden, daß es unendlich viele O. B. für $I[x]$ gibt, wobei allen Elementen von I die ursprüngliche Ordnung zugewiesen ist.

Eine solche Ordnung kann folgendermaßen definiert werden:

1.) $\{x\}=\mu$ irgendeine reelle Zahl; daher muß einem Monom ax^n die Ordnung $\{ax^n\}=\{a\}+n\mu$ zugeordnet werden.

2.) Wenn $F(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ist, so wird gesetzt

$$\{F(x)\}=\operatorname*{Min}_{i=0,1,\ldots,n}(\{a_i\}+i\mu).$$

Es muß also bewiesen werden, daß dies eine zulässige O. B. ist. Die Erfüllung von Postulat (2) für jede Ordnungsbestimmung erweist man sofort. Es sei nämlich $G(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, wobei wir den Fall, daß der Grad von G kleiner ist, als der Grad von F miterledigen, indem wir den Koeffizienten 0 auch bei der höchsten Potenz von x zulassen. Dann ist

$$F(x) + G(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)\, x^i = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$

$$\{F(x) + G(x)\} = \text{Min}\,(\{c_i\} + i\mu) = \text{Min}\,(\{a_i + b_i\} + i\mu)\,.$$

Da aber

$$\{a_i + b_i\} \geqq \text{Min}\,(\{a_i\}, \{b_i\}),$$

wobei das $>$ Zeichen nur im Fall $\{a_i\} = \{b_i\}$ eintreten kann, so folgt sofort

$$\{F(x) + G(x)\} \geqq \text{Min}\,(\{F(x)\}, \{G(x)\})$$

wobei das $>$ Zeichen auch wieder nur im Fall $\{F(x)\} = \{G(x)\}$ eintreten kann.

Zum Nachweis von Postulat (1) werde angenommen, daß $a_i x^i$ das Glied kleinster Ordnung in $F(x)$ sei und, wenn es deren mehrere gibt, dasjenige mit der kleinsten Potenz von x; die analoge Bedingung für $G(x)$ erfülle das Glied $b_k x^k$; es ist also

$F(x) = a_i x^i$ + Glieder größerer Ordnung oder gleicher Ordnung mit größeren Potenzen von x

$G(x) = b_k x^k +$ „ „

daher $\{F(x)\} = \{a_i\} + i\mu$, $\{G(x)\} = \{b_k\} + k\mu$.

Daher ist

$F(x)\,G(x) = x^{i+k}$ ($a_i b_k$ + eventuell Koeffizientenprodukte größerer Ordnung) + Glieder größerer Ordnung oder gleicher Ordnung mit größeren Potenzen von x.

Der Koeffizient von x^{i+k} hat die Ordnung $\{a_i b_k\} = \{a_i\} + \{b_k\}$, da für I eine O. B. vorliegt, also die Postulate (1) und (2) erfüllt sind, und daher ist nach unseren Festlegungen für die Ordnung eines Polynoms

$$\{F(x)\,G(x)\} = (i + k)\,\mu + \{a_i\} + \{b_k\} = \{F(x)\} + \{G(x)\}\,.$$

Es möge gleich hier eine Überlegung angeschlossen werden, welche beim Nachweis des *Bauer-Dumas*schen Satzes Verwendung finden wird.

Es möge ein Integritätsbereich I vorliegen, von dem wir annehmen, daß seine sämtlichen Elemente eindeutig als Polynome eines bestimmten Elementes p dargestellt werden können mit Koeffizienten aus einem Modul M, der also Teilbereich von I ist und auch das Element 1 enthalten möge. Ferner werde eine O. B. in I vorausgesetzt, welche die Eigenschaft hat, daß für je zwei Elemente a und b aus M eine Äquivalenz $ab \sim Cp$ unmöglich ist, wenn $ab \neq 0$, wobei C ein Element von I bedeutet.

Man sieht sofort, daß der eben behandelte Fall von $I[x]$ einen Spezialfall unserer Annahmen repräsentiert.

Aus unseren Annahmen kann nun geschlossen werden, daß aus $A = \sum_{i=1}^{n} a_i\, p^i$ folgt

$$\{A\} = \text{Min}\,(\{a_i\} + i\{p\})\,.$$

Denn nach dem zweiten Postulat für jede O. B. ist sicher

$$\{A\} \geqq \text{Min}\,(\{a_i\} + i\{p\}),$$

wobei das $>$ Zeichen nur eintreten kann, wenn mindestens zwei Glieder die niedrigste Ordnung besitzen. Es seien die Glieder niedrigster Ordnung von A

$$a_\alpha p^\alpha + a_\beta p^\beta + \cdots + a_\gamma p^\gamma, \quad \alpha < \beta < \cdots < \gamma .$$

Dann würde die Summe dieser Glieder eine höhere Ordnung besitzen als jeder einzelne Summand, also eine Äquivalenz bestehen

$$a_\alpha p^\alpha \sim -(a_\beta p^\beta + \cdots + a_\gamma p^\gamma) = p^\beta A',$$

daher nach § 2, Satz 2

$$a_\alpha \sim A' p^{\beta-\alpha}, \quad \beta - \alpha \geqq 1,$$

und das ist ein Widerspruch gegen unsere Voraussetzung, daß $ab \sim Cp$ unmöglich ist, wenn $ab \neq 0$, da M nach Voraussetzung das Element 1 enthält.

Nun läßt sich aber ganz analog wie oben beweisen, daß es dann sicher unendlich viele O. B. in I gibt, in denen die O. B. der Elemente von M erhalten bleibt. Bezeichnen wir nämlich die neue O. B. eines Elementes A mit $\{A\}^*$, so kann diese definiert werden durch

$$\{A\}^* = \text{Min}\,(\{a_i\} + i\{p\}^*), \quad \text{wobei} \quad \{p\}^* > \{p\}.$$

Beweis: Nach Definition ist $\{A\}^* \geqq \{A\}$ für jedes Element von I.

Ferner folgt aus unseren Annahmen über I, daß für drei Elemente a, b, c von M, welche in der Relation stehen

$$ab = c + Cp,$$

stets $\{ab\} = \{c\}$ gilt, also

$$\{Cp\} \geqq \{c\} = \{a\} + \{b\}.$$

Da aber $\{Cp\}^* > \{Cp\}$, wenn $C \neq 0$, so gilt auch

$$\{ab\}^* = \{c\} = \{a\} + \{b\}.$$

Daraus ist nun das erste Postulat als richtig zu erweisen. Es sei nämlich

$A =$ $a_i p^i +$ Glieder höherer Ordnung oder gleicher Ordnung mit höheren Potenzen von p

$B =$ $b_k p^k +$ „ „ „

Dann ist

$AB = p^{i+k}$ ($a_i b_k +$ eventuell Produkte von Gliedern höherer Ordnung aus M) + Glieder höherer Ordnung oder gleicher Ordnung mit höheren Potenzen von p.

Bringt man diesen Ausdruck auf die Normalform, so ergibt sich

$$a_i b_k = c_{ik} + C_{ik} p, \quad \text{wobei } c_{ik} \text{ in } M \text{ liegt und } \{c_{ik}\} = \{a_i\} + \{b_k\}.$$

Die anderen Glieder der Klammer bei p^{i+k} liefern Elemente aus M von höherer Ordnung $c'_{ik} + \cdots$ und wegen der Moduleigenschaft von M liegt $c_{ik} + c'_{ik} + \cdots = c^*_{ik}$ auch in M und hat die Ordnung $\{a_i\} + \{b_k\}$. Bei der Reduktion der anderen Glieder können zum Koeffizienten von p^{i+k} nur noch Glieder höherer Ordnung hinzutreten, welche also die Ordnung dieses Koeffizienten nicht ändern. Es gilt daher

$$\{AB\}^* = \{a_i\} + \{b_k\} + (i+k)\{p\}^* = \{A\}^* + \{B\}^*, \quad \text{qu. e. d.}$$

Daß auch das Postulat (2) erfüllt ist, folgt sofort aus der Tatsache, daß die O. B. der Elemente von M ungeändert geblieben ist.

§ 4. Newtonsche Polygone.

Die unendlich vielen O. B. für die Elemente von $I[x]$ entsprechend den verschiedenen Werten von μ können folgendermaßen geometrisch veranschaulicht werden. Es sei

$$F(x) = \sum_{i=l}^{n} a_i x^i \qquad a_l \neq 0,\ a_n \neq 0 .$$

Man ordne nun in einem *Cartesi*schen Koordinatensystem dem Glied $a_i x^i$ den Punkt mit den Koordinaten $i, \{a_i\}$ zu, wenn $\{a_i\} \neq +\infty$ und keinen Punkt, wenn $\{a_i\} = +\infty$. Dann entsprechen dem Polynom $F(x)$ $r \leqq n+1$ Punkte. Die Ordnung des Gliedes $a_i x^i$ ist für $\{a_i\} = +\infty$ natürlich auch $+\infty$ und für $\{a_i\} \neq +\infty$ gleich dem Ordinatenabschnitt der Geraden $\mu x + y = \mu i + \{a_i\}$, welche durch den zugeordneten Punkt hindurchgeht und die Richtungstangente $-\mu$ hat. Legt man also an die Punktgruppe von r Punkten, welche dem Polynom $F(x)$ entsprechen, eine untere Stützgerade der Richtung $-\mu$, so ist der Ordinatenabschnitt dieser Geraden gleich der Ordnung von $F(x)$ für diese Ordnungsbestimmung, welche jetzt auch als Ordnungsbestimmung von $F(x)$ in der Richtung μ bezeichnet werden soll. Der Kürze halber wollen wir einen Punkt der Punktgruppe, der auf der Stützgeraden mit dem Richtungskoeffizienten $-\mu$ (kurz Stützgerade μ) einen Stützpunkt der Richtung μ oder kurz Stützpunkt μ nennen. Durchläuft μ alle reellen Zahlen, so umhüllen die Stützgeraden μ einen nach unten konvexen Polygonzug, der auch in eine Strecke oder in einen Punkt ausarten kann (das letztere nur für Monome). Dieser Polygonzug soll das dem Polynom $F(x)$ zugeordnete *Newton*sche Polygon (kurz N. P.) heißen. Der Punkt $P_0 = l, \{a_l\}$ ist sicher Punkt des N. P., nämlich Stützpunkt für genügend große Werte von μ und soll sein Anfangspunkt heißen. Ebenso ist $P_s = n, \{a_n\}$ sicher Stützpunkt für negative Werte von μ von genügend großem absoluten Betrag und daher auch Punkt des N. P. und soll sein Endpunkt heißen. Im allgemeinen liegt auf jeder Stützgeraden ein einziger Stützpunkt und nur für eine bestimmte Anzahl von diskreten Werten von μ (diese heißen charakteristische Richtungen) $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_s$ liegen mehrere Stützpunkte auf der betreffenden Stützgeraden. Es sei P_i einziger Stützpunkt für alle μ des offenen Intervalls (μ_{i+1}, μ_i) resp. P_0 für das Intervall $(\mu_1, +\infty)$, P_s für das Intervall $(-\infty, \mu_s)$, dann sind $P_0, P_1, \ldots, P_s$ die Eckpunkte des N. P. und $\overline{P_{i-1}, P_i}$ ist eine Polygonseite des N. P. zur charakteristischen Richtung μ_i gehörig, welche aus einer Strecke der Stützgeraden μ_i besteht und eventuell auch noch andere Stützpunkte als P_{i-1} und P_i enthalten kann.

Ist $G(x) = \sum_{i=k}^{m} b_i x^i$, $b_k \neq 0$, $b_m \neq 0$ ein zweites Polynom, sind $Q_0, Q_1, \ldots, Q_t$ die Eckpunkte des zugeordneten N. P., $\nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_t$ die charakteristischen Richtungen, so folgt aus dem Beweis, daß durch unsere Festsetzungen eine Ordnungsbestimmung für Polynome definiert ist, sofort, daß für eine Richtung μ, für welche

P_i resp. Q_k einzige Stützpunkte sind, welche also weder für $F(x)$ noch für $G(x)$ charakteristisch ist, $P_i + Q_k$ einziger Stützpunkt für die Punktgruppe ist, welche dem Produkt $F(x)\,G(x)$ entspricht, also auch Eckpunkt des diesem Produkt entsprechenden N. P. Ist $\mu = \mu_i$ charakteristische Richtung für $F(x)$ aber nicht für $G(x)$, so läßt sich eine positive Zahl ε so wählen, daß für alle Richtungen des offenen Intervalles $(\mu_i,\ \mu_i + \varepsilon)$ P_{i-1} einziger Stützpunkt ist und für alle Richtungen des offenen Intervalles $(\mu_i - \varepsilon,\ \mu_i)$ der Punkt P_i. Für das ganze offene Intervall $(\mu_i - \varepsilon,\ \mu_i + \varepsilon)$ sei ferner Q_k einziger Stützpunkt von $G(x)$. Dann ergibt sich aus dem eben Bewiesenen, daß für alle Richtungen von $\dfrac{(\mu_i,\ \mu_i + \varepsilon) \text{ der Punkt } P_{i-1} + Q_k}{(\mu_i - \varepsilon,\ \mu_i) \text{ der Punkt } P_i + Q_k}$ einziger Stützpunkt der dem Produkt $F(x)\,G(x)$ zugeordneten Punktgruppe ist. $P_{i-1} + Q_k$ und $P_i + Q_k$ sind daher Eckpunkte des zugehörigen N. P. und die Polygonseite zwischen diesen beiden Eckpunkten gehört zur charakteristischen Richtung μ_i und ist vektoriell gleich der Polygonseite $\overline{P_{i-1},\ P_i}$. Eine ganz analoge Überlegung lehrt, daß für eine Richtung $\mu = \mu_i = \nu_k$, welche sowohl für $F(x)$ wie für $G(x)$ charakteristisch ist, ein $\varepsilon > 0$ so gewählt werden kann, daß für das offene

Intervall $(\mu_i,\ \mu_i + \varepsilon)$	P_{i-1}	einziger	Stützpunkt	für	$F(x)$
	Q_{k-1}	„	„	„	$G(x)$
	$P_{i-1} + Q_{k-1}$	„	„	„	$F(x)\,G(x)$
und für $(\mu_i - \varepsilon,\ \mu_i)$	P_i	„	„	„	$F(x)$
	Q_k	„	„	„	$G(x)$
	$P_i + Q_k$	„	„	„	$F(x)\,G(x)$

ist. $\overline{P_{i-1} + Q_{k-1},\ P_i + Q_k}$ ist daher Seite des N. P. von $F(x)\,G(x)$ zur charakteristischen Richtung $\mu_i = \nu_k$ und gleich der vektoriellen Summe der beiden parallelen Polygonseiten $\overline{P_{i-1},\ P_i}$ und $\overline{Q_{k-1},\ Q_k}$. Dieser Zusammenhang zwischen den N. P. von $F(x)$, $G(x)$ und $F(x)\,G(x)$ ist der Inhalt des *Dumas*schen Produktsatzes.

Die geometrische Deutung der Überlegungen des zweiten Teiles des vorigen Paragraphen geht nun ganz analog.

Jedem Element $a_i\,p^i$ lassen wir den Punkt $i, \{a_i\}$ entsprechen, wenn $\{a_i\} \neq +\infty$ und keinen Punkt, wenn $\{a_i\} = +\infty$. Dem Element $A = \sum_{i=0}^{n} a_i\,p^i$ entspricht dann wieder eine endliche Punktgruppe. Die Ordnung $\{A\}^*$ ist dann gleich dem Ordinatenabschnitt der unteren Stützgeraden an diese Punktgruppe mit dem Richtungskoeffizienten $-\{p\}^*$.

Betrachten wir jetzt die Gesamtheit der Stützgeraden μ, wobei $\mu > \{p\}$, so umhüllen diese wieder ein Polygon, welches wieder ausarten kann und das verkürzte *Newton*sche Polygon (v. N. P.) von A heißen soll. Für das v. N. P. von $A\,B$ gilt dann derselbe Sachverhalt wie für das N. P. von $F(x)\,G(x)$. Das v. N. P. geht in das N. P. über, wenn es in I eine Ordnungsbestimmung gibt, in der $\{p\}$ gleich einer negativen Zahl von beliebig großem absoluten Betrag ist.

§ 5. Anwendungen.

Aus dem Bisherigen ergibt sich sofort als Anwendung das verallgemeinerte *Eisenstein*sche Irreduzibilitätskriterium.

Es sei

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

ein Polynom n-ten Grades also $a_n \neq 0$ und es werde ferner $a_0 \neq 0$ vorausgesetzt. $F(x)$ heißt reduzibel in I, wenn es zwei Polynome $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ mit Koeffizienten aus I vom Grade m und $n - m$ gibt, wobei $0 < m < n$, so daß $F(x) = \varphi(x)\,\psi(x)$. Für jede O. B. in I besitzt $F(x)$ ein N. P. Nennen wir einen Punkt, dessen Abszisse eine ganze rationale Zahl und dessen Ordinate eine Ordnungszahl von I ist, kurz einen Gitterpunkt, so können wir das verallgemeinerte *Eisenstein*sche Irreduzibilitätskriterium in der Form aussprechen: $F(x)$ ist sicher in I irreduzibel, wenn es eine O. B. in I gibt, für die das N. P. von $F(x)$ als Gitterpunkte nur den Anfangspunkt $P_0 = (0, \{a_0\})$ und den Endpunkt $P_1 = (n, \{a_n\})$ aufweist, also nur aus einer Seite besteht, welche keinen weiteren Gitterpunkt enthält. Da das N. P. ferner sofort die Gradzahlen der eventuell vorhandenen Faktoren abzulesen gestattet, so können wir auch weiter schließen: $F(x)$ ist sicher irreduzibel, wenn bei Betrachtung verschiedener O. B. in I sich keine Zahl m $(0 < m < n)$ als Grad eines eventuell vorhandenen Faktors für alle O. B. ermitteln läßt. Z. B. ist $x^5 + 6x^3 + 24\,x + 72$ im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel, weil das N. P. für die O. B. $\{2\} = 1$ aus den Punkten 0,3; 3,1; 5,0 und für die O. B. $\{3\} = 1$ aus den Punkten 0,2; 1,1; 5,0 besteht. Ein Faktor müßte daher nach dem ersten N. P. vom zweiten oder dritten Grad, nach dem zweiten N. P. vom ersten oder vierten Grad sein.

§ 6. Primelement-Integritätsbereiche.

Für die weiteren Anwendungen wollen wir über die O. B. in I noch zwei Voraussetzungen machen, und zwar: 1.) Es gibt positive Ordnungszahlen in I mit der einzigen Häufungsstelle $+\infty$; 2.) wenn $\{a\} \geqq \{b\}$, so gibt es mindestens ein Element c in I, so daß $a \sim bc$.

Aus diesen Prämissen folgt sofort die Existenz eines Elementes p von kleinstmöglicher positiver Ordnungszahl, die wir unbeschadet der Allgemeinheit gleich 1 annehmen können. p hat die Primelementeigenschaft bezüglich des Integritätsbereiches I^* aller ganzen Elemente von I bezüglich dieser O. B. Ferner ist deutlich, daß jedes ganze Element $a \neq 0$ die Gestalt besitzt

$$a \sim e\,p^{\alpha}$$

wobei e eine Einheit bezüglich dieser O. B. und α eine ganze rationale Zahl $\geqq 0$ ist.

Ein derartiger Integritätsbereich soll im Anschluß an *Rychlík* (d. J. Band 153, S. 97) als Primelement-Integritätsbereich (P. I.) bezeichnet werden.

Wenn es in I Elemente negativer Ordnung gibt, so gibt es auch ein Element p', für das $pp' \sim 1$ gilt. Denn es sei b von negativer Ordnung, dann kann dies nur eine ganze negative Zahl sein, sagen wir $-\beta$. Daher ist $b\,p^{\beta} = e'$ gleich einer Einheit, und wenn $e''e' \sim 1$, so erfüllt das Element

$$p' = e'' p^{\beta-1} b$$

die Bedingung $p p' \sim 1$.

Ein derartiger Integritätsbereich soll als ein vollständiger Primelement-Integritätsbereich (v. P. I.) bezeichnet werden. In ihm ist Äquivalenzdivision durch jedes nicht verschwindende Element möglich.

§ 7. Polynome mit Koeffizienten aus einem vollständigen Primelement-Integritätsbereich.

Für Polynome mit Koeffizienten aus einem v. P. I. kann nun die Theorie der Äquivalenzteilbarkeit analog der elementaren Algebra entwickelt werden. Es sei also $\bar{I}$ ein v. P. I. Wir betrachten Polynome von x mit Koeffizienten aus $\bar{I}$, also den Integritätsbereich $\bar{I}[x]$, in dem wir eine O. B. durch $\{x\} = \mu$ wie in § 3 festlegen, die wir für das Folgende festhalten.

Definition: Sind in $F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ die Glieder niedrigster Ordnung f

$$a_{n_0} x^{n_0},\ a_{n_1} x^{n_1},\ \ldots,\ a_{n_s} x^{n_s},\ n_0 > n_1 > \cdots > n_s,$$

so heißt das Polynom

$F_0(x) = a_{n_0} x^{n_0} + a_{n_1} x^{n_1} + \cdots + a_{n_s} x^{n_s}$ der Hauptteil von $F(x)$; es ist $F(x) \sim F_0(x)$; und der Grad n_0 von $F_0(x)$ soll auch als Äquivalenzgrad von $F(x)$ (bezüglich unserer O. B.) bezeichnet werden.

Es folgt dann aus unseren Überlegungen über N. P. sofort, daß der Äquivalenzgrad des Produktes $F(x)\,G(x)$ gleich der Summe der Äquivalenzgrade von $F(x)$ und $G(x)$ ist.

Wegen der Eigenschaft von $\bar{I}$, daß Äquivalenzdivision durch jedes nicht verschwindende Element möglich ist, können wir nun, wenn der Äquivalenzgrad m_0 von $G(x)$ nicht größer als der Äquivalenzgrad n_0 von $F(x)$ ist, zwei Polynome Q und R so bestimmen, daß

$$F = GQ + R\,,$$

wobei $\{Q\} = \{F\} - \{G\}$ und R mod $\mathfrak{O}_f{}^*$ einem Polynom kongruent ist, das den Grad m_0 nicht erreicht (also eventuell auch identisch verschwindet). $\mathfrak{O}_f{}^*$ bedeutet dabei wie in § 1 den Modul aller Elemente von $\bar{I}[x]$, deren Ordnung größer als $f = \{F\}$ ist.

Es läßt sich nun zeigen, daß der Quotient Q bis auf eine Äquivalenz, der Rest R mod $\mathfrak{O}_f{}^*$ eindeutig bestimmt ist, d. h. auch bis auf eine Äquivalenz, wenn $R \equiv\!|\!\equiv 0\ (\mathfrak{O}_f{}^*)$. Zum Beweise machen wir die Annahme

$$F = GQ + R = GQ_1 + R_1\,,$$

wobei Q_1 und R_1 dieselben Bedingungen wie Q und R erfüllen. Dann folgt

$$(*) \qquad 0 = G(Q - Q_1) + (R - R_1)\,.$$

Es ist nach Voraussetzung $\{Q\} = \{Q_1\} = \{F\} - \{G\}$. Wäre nun $Q \neq Q_1$, also $\{Q - Q_1\} = \{Q\}$, so wäre $\{G(Q - Q_1)\} = \{F\} = f$. Dann folgt aber aus (*) durch Betrachtung mod $\mathfrak{O}_f^*$, daß $R - R_1$ mod $\mathfrak{O}_f^*$ einem Polynom kongruent wäre,

das einen Grad $\geqq m_0$ besitzt, im Widerspruch zu der Annahme, daß sowohl R als auch R_1 mod $\mathfrak{D}_f^*$ Polynomen kongruent sind, welche den Grad m_0 nicht erreichen.

Die Annahme $Q \not\sim Q_1$ ist also zu verwerfen und es gilt $Q_1 \sim Q$, daher $GQ_1 \sim GQ$, und wenn $\{R\} = \{F - GQ\} = f$, so folgt daraus weiter nach § 2, Satz 3 $R \sim R_1$, qu. e. d.

Nun läßt sich aber der *Euklid*ische Algorithmus entwickeln. Es sei $F(x)$ vom Äquivalenzgrad n, $F_1(x)$ vom Äquivalenzgrad $n_1 \leqq n$, dann ist

$$F \sim F_1 Q_1 + F_2, \quad F_2 \text{ vom Äquivalenzgrad } n_2 < n_1, \quad \{F_2\} = \{F\},$$
$$F_1 \sim F_2 Q_2 + F_3, \quad F_3 \text{ ,, ,, } n_3 < n_2, \quad \{F_3\} = \{F_1\},$$

und nach einer endlichen Anzahl von Schritten muß die Äquivalenzdivision aufgehen:

$$F_{r-2} \sim F_{r-1} Q_{r-1} + F_r, \quad F_r \text{ vom Äquivalenzgrad } n_r < n_{r-1}, \quad \{F_r\} = \{F_{r-2}\},$$
$$F_{r-1} \sim F_r Q_r.$$

Da in jeder dieser Äquivalenzen die rechts angeschriebene Gleichheit der Ordnungszahlen gilt, so folgt aus

$$F_{i-1} \sim F_i Q_i + F_{i+1}$$

auch

$$F_{i-1} - F_i Q_i \sim F_{i+1},$$

und daraus können wir in bekannter Weise schließen, daß F_r die Eigenschaft des größten gemeinschaftlichen Äquivalenzteilers von F und F_1 besitzt, nämlich

$$F \sim A F_r, \qquad F_1 \sim B F_r,$$
$$F_r \sim C F + D F, \text{ wobei } \{C F\} = \{D F_1\} = \{F_r\}.$$

Ist H irgendein gemeinschaftlicher Äquivalenzteiler von F und F_1:

$$F \sim A_1 H, \qquad F_1 \sim B_1 H,$$

so folgt

$$C F \sim C A_1 \cdot H, \qquad D F_1 \sim D B_1 \cdot H$$

und wegen $\{C F\} = \{D F_1\} = \{C F + D F_1\} = \{F_r\}$:

$$F_r \sim C A_1 H + D B_1 H = (C A_1 + D B_1) H,$$

H ist also ein Äquivalenzteiler von F_r, qu. e. d.

Jedes andere Polynom $D(x)$, welches die Eigenschaft des größten gemeinschaftlichen Äquivalenzteilers von $F(x)$ und $F_1(x)$ hat, erscheint daher in der Gestalt

$$D(x) \sim c F_r(x),$$

wobei c ein Element von $\bar{I}$ ist.

Nennen wir ein Polynom $F(x)$ vom Grade n äquivalenzreduzibel, wenn es zwei Polynome $G(x)$ und $H(x)$ von den Graden r und s ($r < n$, $s < n$) gibt, so daß $F(x) \sim G(x) H(x)$, im entgegengesetzten Fall äquivalenzirreduzibel [1]), so folgt

[1]) Nach dieser Definition heißt daher ein lineares Polygon von Äquivalenzgrad 0 äquivalenzreduzibel ebenso wie jedes Polynom äquivalenzreduzibel ist, dessen Äquivalenzgrad kleiner als sein Grad ist.

aus der Theorie des größten gemeinschaftlichen Äquivalenzteilers sofort, daß ein äquivalenzirreduzibles Polynom $P(x)$ die Primelementeigenschaft für $\bar{I}[x]$ hat. Denn erstens kann $P(x)$ dann kein Äquivalenzteiler von 1 sein, zweitens folgt aus $F(x)\,G(x) \sim P(x)\,Q(x)$ unter der Voraussetzung, daß $P(x)$ kein Äquivalenzteiler von $F(x)$ ist, daß dann der größte gemeinschaftliche Äquivalenzteiler von $F(x)$ und $P(x)$ vom 0-ten Grad sein muß und daher gleich 1 angenommen werden kann. Aus

$$1 \sim AF + BP, \qquad \{AF\} = \{BP\} = 0 \quad \text{folgt aber}$$
$$G \sim AFG + BGP, \quad \{AFG\} = \{BGP\} = \{G\}.$$

Nach Voraussetzung ist

$$FG \sim PQ, \text{ daher}$$
$$AFG \sim APQ$$
$$BGP \sim BGP, \text{ daher wegen } \{AFG\} = \{BGP\} = \{G\}:$$
$$AFG + BGP \sim G \sim APQ + BGP = (AQ + BG)P, \qquad \text{qu. e. d.}$$

Aus diesen Überlegungen ergibt sich nun der verallgemeinerte *Bauer-Dumas*-sche Satz folgendermaßen. Es sei $\bar{I}$ ein v. P. I. und gleichzeitig ein Körper, $P(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus $\bar{I}$, das bezüglich der O. B. $\{x\} = \mu$ (in der Richtung μ) äquivalenzirreduzibel vom Grade n ist und die Ordnung $\{P\} = p$ besitzen möge. Die Gesamtheit der Polynome mit Koeffizienten aus $\bar{I}$, deren Grad n nicht erreicht, bilden dann einen Modul M und unsere O. B. ist so beschaffen, wie es im zweiten Teil von § 3 angenommen war, daß aus $ab \sim PQ$, wobei a und b Polynome aus M sind, $ab = 0$ folgt. Denn da P Primelement für $\bar{I}[x]$ ist, folgt aus $ab \sim PQ$, daß a oder b den Äquivalenzteiler P besitzt und das ist wegen der Gradverhältnisse nur möglich, wenn a oder b verschwindet, also $ab = 0$ ist.

Jedes Polynom mit Koeffizienten aus $\bar{I}$ läßt sich eindeutig in die Gestalt setzen

$$A(x) = a_0(x) + a_1(x)\,P(x) + \cdots + a_2(x)\,P^r(x)\,,$$

wobei die Polynome $a_i(x)$ den Grad n nicht erreichen, also dem Modul M angehören. Ferner ist, wie sich ebenfalls aus den Überlegungen von § 3 ergibt,

$$\{A(x)\} = \text{Min}\,(\{a_i(x)\} + i\,p)\,.$$

Auf diese Gestalt der Elemente von $\bar{I}[x]$ läßt sich aber jetzt die Theorie der v. N. P. anwenden. Es ist also stets das v. N. P. von $A(x)\,B(x)$ bezüglich $P(x)$ gleich der Summe der v. N. P. von $A(x)$ und $B(x)$.

Daraus folgt nun, daß ein Polynom $C(x)$ der Gestalt

$$C(x) = c_0(x) + c_1(x)\,P(x) + \cdots + c_{r-1}(x)\,P^{r-1}(x) + P^r(x)$$

sicher irreduzibel ist, wenn sein v. N. P. aus einer einzigen Seite zwischen den Punkten $0, \{c_0(x)\}$ und $r, 0$ besteht und auf dieser Seite kein weiterer Gitterpunkt liegt. Denn wenn $C(x) = C_1(x)C_2(x)$, so könnte das v. N. P. des einen Faktors — sagen wir $C_1(x)$ — nur aus einem Punkt und des zweiten Faktors $C_2(x)$ aus einer Seite bestehen, welche vektoriell gleich dem v. N. P. von $C(x)$ wäre. Dann hätte

aber $C_2(x)$ mindestens den Grad rn, und da dies der Grad von $C(x)$ ist, wäre $C_1(x)$ ein Element von $\bar{I}$, wir hätten also keine eigentliche Zerlegung vor uns. Damit ist aber die Irreduzibilität von $C(x)$ sichergestellt.

Herr *Kürschák* macht in seiner eingangs zitierten Arbeit über irreduzible Formen die Annahme, daß das Polynom

$$G(x) = c_0(x) + c_1(x)\,P(x) + \cdots + c_{r-1}(x)\,P^{r-1}(x)$$

$P(x)$ nicht als Äquivalenzteiler enthält, d. h. daß $\{G(x)\} = \{c_0(x)\}$. Dadurch wird bei $p \geqq 0$ (und diese Annahme macht Herr *Kürschák* weiter) in Verbindung mit den anderen Annahmen erreicht, daß das v. N. P. die gewünschte Gestalt hat. Die Annahme ist aber nicht notwendig, und für den Beweis kommt nur die Gestalt des v. N. P. zur Geltung. Als Beispiel betrachten wir das Polynom $F(x)$ 6-ten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten und der O. B. $\{3\} = 1$, $\{x\} = 0$:

$$F(x) = (x^2+1)^3 + (3+3x)(x^2+1)^2 + (9-9x)(x^2+1) + (9+9x).$$

x^2+1 ist für diese O. B. äquivalenzirreduzibel (d. h. mod 3 irreduzibel) und von der Ordnung 0.

Die $F(x)$ bezüglich x^2+1 zugeordnete Punktgruppe besteht aus den Punkten 0, 2; 1, 2; 2, 1; 3, 0. Das gibt als v. N. P. die Strecke zwischen den Punkten 0, 2 und 3, 0 und diese enthält keinen weiteren Gitterpunkt. $F(x)$ ist also irreduzibel. Das Polynom

$$G(x) = (3+3x)(x^2+1)^2 + (9-9x)(x^2+1) + (9+9x)$$

besitzt aber den Äquivalenzteiler x^2+1, denn es ist

$$G(x) \sim (3+3x)(x^2+1)^2.$$

Die Bedingungen des *Bauer-Dumas*schen Satzes, wie sie dort formuliert sind, sind also nicht erfüllt.

§ 8. Zerfällung eines Polynoms mit Koeffizienten aus einem Primelement-Integritätsbereich nach einer beliebigen Potenz des Primelements als Modul.

Es sei wieder I ein Primelement-Integritätsbereich, der aber nicht als vollständig vorausgesetzt werden muß, sein Primelement habe die Ordnung 1. Wenn wir in $I[x]$ die O. B. betrachten, die durch $\{x\} = \mu$ definiert ist, wobei μ eine irrationale Zahl ist, so besitzt jedes Polynom nur ein Glied niedrigster Ordnung. Es sei

$$F(x) = \sum_{\sigma=0}^{n} a_\sigma x^\sigma, \qquad a_n \neq 0,$$

und es werde vorausgesetzt, daß für unsere O. B. das Glied $a_i x^i$ die niedrigste Ordnung besitze, wobei $0 < i < n$ sei. Wir setzen der Kürze halber $a_i = a$. Das N. P. von $F(x)$ besitzt dann den Punkt $i, \{a\}$ sicher als Eckpunkt, und dieser fällt der Voraussetzung nach nicht mit dem Endpunkt zusammen. Es wird dann behauptet, daß für jede reelle Zahl $\varrho \geqq \{a\} + i\mu$ eine Zerfällung gilt

$$F(x) \equiv \varphi(x)\,\psi(x)\ (\mathfrak{O}_\varrho^*),$$

wobei im Falle $\mu > 0$ $\varphi(x) \sim a$ und den Grad $n - i$ nicht überschreitet,
$\psi(x) = x^i +$ Glieder mit niedrigeren Potenzen von x und von höherer Ordnung als $i\mu$,
im Falle $\mu < 0$ $\varphi(x) \sim 1$ und den Grad $n - i$ nicht überschreitet,
$\psi(x) = a x^i +$ Glieder mit niedrigeren Potenzen von x und von höherer Ordnung als $i\mu$.

Beweis: Die Ordnungszahlen aller Polynome, welche den Grad n nicht überschreiten, haben die Gestalt $\mu k + g$, wobei g eine ganze rationale Zahl ist und k nur die Werte $0, 1 \ldots, n$ annehmen kann. Diese Zahlen besitzen im Endlichen keine Häufungsstelle. Unsere Behauptung ist für $\varrho_0 = \{F\} = \{a\} + i\mu$ richtig, wir können daher vollständige Induktion anwenden und zeigen, daß sie unter der Voraussetzung, daß sie für die Ordnungszahl ϱ gilt, auch für die nächst größere Ordnungszahl richtig ist.

Es gelte also

$$F(x) \equiv \varphi(x)\, \psi(x)\ (\mathfrak{O}_\varrho^*),$$

wobei φ und ψ die angegebenen Eigenschaften haben, und es sei

$$F - \varphi\, \psi \sim b\, x^k .$$

Dann ist

$$\varrho_1 = \{b\} + k\mu > \varrho \geqq \{a\} + i\mu .$$

I. Es sei $\mu > 0$, $k \geqq i$.

Setzen wir dann

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) + b\, x^{k-i},$$

so überschreitet auch $\varphi_1(x)$ nicht den Grad $n - i$, und es gilt $\varphi_1(x) \sim \varphi(x) \sim a$ und

$$\varphi_1(x)\, \psi(x) = \varphi\, \psi + b\, x^{k-i}\, \psi \equiv \varphi\, \psi + b\, x^k (\mathfrak{O}_{\varrho_1}^*),$$

daher

$$F - \varphi_1\, \psi \equiv F - \varphi\, \psi - b\, x^k \equiv 0\ (\mathfrak{O}_{\varrho_1}^*),$$

also

$$F \equiv \varphi_1\, \psi\ (\mathfrak{O}_{\varrho_1}^*).$$

II. $\mu > 0$, $k < i$, dann ist $\{b\} - \{a\} > \mu(i - k) > 0$.

Daher gibt es ein Element c, so daß $b \sim a\, c$. Setzen wir $\psi_1(x) = \psi(x) + c\, x^k$, so ist $\psi_1(x) = x^i +$ Glieder mit niedrigeren Potenzen von x und $\psi_1(x) \sim \psi(x) \sim x^i$, und es gilt

$$\varphi(x)\, \psi_1(x) = \varphi\, \psi + c\, x^k \varphi \equiv \varphi\, \psi + a\, c\, x^k \equiv \varphi\, \psi + b\, x^k\ (\mathfrak{O}_{\varrho_1}^*),$$

daher $F \equiv \varphi\, \psi_1\ (\mathfrak{O}_{\varrho_1}^*)$.

III. $\mu < 0$, $k \geqq i$, dann ist $\{b\} - \{a\} < \mu(i - u) \geqq 0$.

Daher gibt es ein Element c, so daß $b \sim ac$. Setzen wir $\varphi_1(x) = \varphi(x) + c\, x^{k-i}$, so überschreitet auch $\varphi_1(x)$ den Grad $n - i$ nicht, und es ist $\varphi_1(x) \sim \varphi(x) \sim 1$; ferner gilt

$$\varphi_1(x)\, \psi(x) = \varphi\, \psi + c\, x^{k-i}\, \psi = \varphi\, \psi + a\, c\, x^k = \varphi\, \psi + b\, x^k\ (\mathfrak{O}_{\varrho_1}^*),$$

daher $F \equiv \varphi_1\, \psi\ (\mathfrak{O}_{\varrho_1}^*)$.

IV. $\mu < 0$, $k < i$.

Setzen wir dann $\psi_1(x) = \psi(x) + bx^k$, so ist auch $\psi_1(x) = x^i +$ Glieder mit niedrigeren Potenzen von x und $\psi_1(x) \sim \psi(x) \sim a\,x^i$, und es gilt

$$\varphi(x)\,\psi_1(x) = \varphi\,\psi + b\,x^k\varphi \equiv \varphi\,\psi + b\,x^k \ (\mathfrak{O}^*_{\varrho_1}),$$

daher $F \equiv \varphi\,\psi_1 \ (\mathfrak{O}^*_{\varrho_1})$.

Damit ist die Behauptung erwiesen und gleichzeitig ein Weg angegeben, die Faktoren wirklich zu bestimmen.

Nun können wir aber sofort den Übergang zu Kongruenzen machen, in denen der Modul eine Potenz von p ist (das entspricht einer O. B. mit $\mu = 0$). Ist nämlich

$$G(x) = \sum_{\sigma=0}^{n} c_\sigma\,x^\sigma$$

$$\{G(x)\} = \text{Min}\,(\{c_\sigma\} + \sigma\,\mu)$$

und bezeichnen wir mit M die Zahl $n\mu$, wenn $\mu \geqq 0$ und die Zahl 0, wenn $\mu < 0$, so gilt sicher

$$\{G(x)\} \leqq \{a_i\} + M \qquad \text{für } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Ist daher g eine ganze rationale Zahl $\leqq \{G(x)\} - M$, so gilt $\{a_i\} \geqq \{G(x)\} - M \geqq g$, also

$$G(x) \equiv 0 \ (p^g).$$

Wir hatten gefunden, daß es für jedes $\varrho \geqq \varrho_0$ zwei Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gibt, so daß

$$F(x) \equiv \varphi(x)\,\psi(x) \ (\mathfrak{O}^*_\varrho), \quad \text{also}$$

$$\{F(x) - \varphi(x)\,\psi(x)\} > \varrho\,.$$

Ist die ganze rationale Zahl $g \leqq \varrho - M$, so gilt daher

$$F(x) - \varphi(x)\,\psi(x) \equiv 0 \ (p^g) \quad \text{oder}$$

$$F(x) \equiv \varphi(x)\,\psi(x) \quad (p^g).$$

Da g mit ϱ gleichzeitig über alle Grenzen wächst, so zerfällt $F(x)$ nach jeder beliebig hohen Potenz von p als Modul in zwei Faktoren i-ten und $(n-i)$-ten Grades, wenn das N. P. von $F(x)$ bezüglich p bei der Abszisse i einen Eckpunkt besitzt.

Ferner ist aus der Theorie der N. P. deutlich, daß das N. P. von $\varphi(x)$ bezw. $\psi(x)$ für genügend hohe Potenzen von p als Modul vektoriell gleich dem Teil des N. P. von $F(x)$ ist, welcher rechts bezw. links vom Punkt $i, \{a\}$ liegt.

Liegen daher die Eckpunkte des N. P. von $F(x)$ bei den Abszissen $0, n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}, n$, wobei $0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_{r-1} < n$, so zerfällt $F(x)$ mod p^g, wobei g jede genügend große natürliche Zahl bedeutet, in r Faktoren der Grade $n_1, n_2 - n_1, \ldots, n - n_{r-1}$, deren N. P. aus einer einzigen Seite bestehen von derselben Richtung, wie sie die entsprechende Polygonseite des N. P. von $F(x)$ besitzt.

§ 9. Konvergente Folgen und perfekte Integritätsbereiche.

Eine Folge $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ von Elementen aus I mit einer bestimmten O. B. heißt konvergent, wenn zu jeder beliebig vorgegebenen Zahl G eine natür-

liche Zahl N bestimmbar ist, so daß $\{c_{n+m} - c_n\} > G$ für alle $n \geqq N$ und jede natürliche Zahl m. Man sieht sofort, daß es zur Erfüllung dieser Bedingung notwendig und hinreichend ist, daß sie für $m = 1$ gilt.

Eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ heißt eine Nullfolge, wenn zu jedem G eine natürliche Zahl N so bestimmbar ist, daß $\{a_n\} > G$ für alle $n \geqq N$.

Es ist klar, daß die Nullfolgen unter den Begriff der konvergenten Folgen fallen.

Eine Folge $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ konvergiert gegen das Element C von I, wenn $c_1 - C,\ c_2 - C, \ldots, c_n - C_1, \ldots$ eine Nullfolge ist. Notwendig für die Existenz des Grenzwertes C ist die Konvergenz der Folge $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, wie man sofort in bekannter Weise ableitet, und ebenso ist der Grenzwert, falls er existiert, durch die Folge eindeutig bestimmt. Es gibt aber natürlich Integritätsbereiche, in denen nicht jede konvergente Folge einen Grenzwert besitzt.

Ein Integritätsbereich von der Abgeschlossenheit, daß jede konvergente Folge einen Grenzwert besitzt, heißt perfekt.

Der am Ende des vorigen Paragraphen formulierte Satz läßt unter der Voraussetzung, daß I perfekt ist, die Fassung zu:

Ist $F(x)$ ein Polynom n-ten Grades mit Koeffizienten aus einem perfekten Primelement-Integritätsbereich und besteht das N. P. von $F(x)$ aus r Seiten, deren Projektionen auf die Abszissenachse die Längen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ $(n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n)$ haben, so zerfällt $F(x)$ in I in r Faktoren $F(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x) \cdots \varphi_r(x)$, deren N. P. vektoriell gleich je einer Polygonseite sind. Ein Faktor $\varphi_i(x)$ ist nach § 5 sicher irreduzibel, wenn sein N. P. außer dem Anfangspunkt und Endpunkt keinen weiteren Gitterpunkt enthält. Im entgegengesetzten Fall läßt sich aber aus der Gestalt des N. P. allein keine Entscheidung treffen.

§ 10. Beispiele für perfekte Primelement-Integritätsbereiche.

1. Ist p eine natürliche Primzahl, so sind sowohl der Körper der p-adischen Zahlen als auch der Integritätsbereich der ganzen p-adischen Zahlen perfekte Primelement-Integritätsbereiche.

Der Hauptsatz garantiert dann z. B. die Existenz einer Wurzel einer Gleichung mit p-adischen Koeffizienten, wenn ein solcher Näherungswert bekannt ist, daß die *Newton*sche Näherungsmethode angewandt werden kann. Die Bedingungen dafür sind bekanntlich [1]) folgende, wenn wir unsere Bezeichnungsweise beibehalten:

Ist $F(x)$ ein Polynom ν-ten Grades mit p-adischen Koeffizienten und ξ_0 eine p-adische Zahl, so daß

$$\left\{\frac{F^{(i)}(\xi_0)}{i!}\right\} = \varrho^{(i)},$$

dann besitzt die Gleichung $F(x) = 0$ eine Wurzel $\xi \equiv \xi_0 (p^{\varrho - \varrho'})$, wenn

[1]) Siehe *K. Hensel,* Theorie der algebraischen Zahlen S. 73 f. und *T. Rella*, Zur Newtonschen Approximationsmethode in der Theorie der p-adischen Gleichungswurzeln, d. J. Bd. 153, S. 111.

$$\varrho > \operatorname*{Max}_{i=2,3,\ldots,\nu} \left(\frac{i\,\varrho' - \varrho^{(i)}}{i-1} \right).$$

Denn die Ordnungsbedingung liefert

$$i(\varrho - \varrho') > \varrho - \varrho' \qquad \text{für} \quad i = 2, 3, \ldots, \nu$$

und sagt aus, daß der Punkt 1, ϱ' Eckpunkt des N. P. von $F(\xi_0 + y)$ bezüglich y ist. Daher läßt sich von $F(\xi_0 + y)$ ein Linearfaktor abspalten.

$$F(\xi_0 + y) = F(\xi_0) + F'(\xi_0)\,y + \frac{F''(\xi_0)}{i!}\,y^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(\xi_0)}{n!}\,y^n$$

$$= \left(y + \frac{F(\xi_0)}{F'(\xi_0)} + \text{Glieder höherer Ordnung} \right) \varphi(y) \quad (p)$$

2. Ist R ein algebraischer Zahlkörper mit dem Primteiler $\mathfrak{p}$, so ist der *Hensel*sche Körper $R(\mathfrak{p})$ ebenso wie die Gesamtheit seiner ganzen Zahlen ein perfekter Primelement-Integritätsbereich mit dem Primelement π, wobei π eine durch $\mathfrak{p}$ aber nicht durch $\mathfrak{p}^2$ teilbare ganze Zahl von $R(\mathfrak{p})$ bedeutet.

3. Ist R ein beliebiger Körper, y eine nicht in R vorkommende Unbestimmte, dann ist die Gesamtheit der Potenzreihen von y mit Koeffizienten aus R ein perfekter Primelement-Integritätsbereich, wenn als Ordnung von $f(y)$ der Exponent der höchsten Potenz von y definiert wird, durch die $f(y)$ teilbar ist.

Ist $G(x, y)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus R und enthält R auch die Unbestimmte x nicht, so ordnen wir einem Glied $a x^i y^k$, $a \neq 0$ den Punkt i, k zu. Dann zerfällt $G(x, y)$ entsprechend seinem N. P. in Polynome in x mit Koeffizienten, welche Potenzreihen von y mit Koeffizienten aus R sind, während im Bereich der Polynome von x und y die Gestalt des N. P. nur notwendige Bedingungen für die Reduzibilität und hinreichende für die Irreduzibilität von $G(x, y)$ abzulesen gestattet.

Bestimmung der geodätisch-rhombischen Netze bei konstantem Krümmungsmaß.

Von *Heinrich Liebmann* in Heidelberg.

Der Satz, daß die beiden Scharen eines rhombischen Netzes von geodätischen Linien auf Flächen konstanter Krümmung ein- und dieselbe Kurve zweiter Klasse umhüllen, die auch in zwei Punkte entarten kann, ist in den letzten Jahren Gegenstand einer Reihe von Arbeiten gewesen [1]).

Wenn hier die Frage erneut aufgegriffen wird, so liegt dabei die Absicht zugrunde, eine Darstellung zu geben, die keine Integration erfordert, die außerdem die Ausnahmefälle, d. h. die Entartung der Klassenkurve gleich mitumfaßt und die endlich eine ganz elementare Übertragung des zuerst für die Ebene gefundenen Ergebnisses auf die Flächen konstanter Krümmung gestattet.

1. Bindung der Geradenscharen eines ebenen rhombischen Netzes.

Die Aufgabe besteht darin, zwei Geradenscharen (Parameter u und v) so zu bestimmen, daß das Bogenelement die Form erhält

$$dx^2 + dy^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2\,,$$

worin E gleich G ist (u und v sind dann die rhombischen Parameter) oder wobei, was auf dasselbe hinauskommt, die Proportion gilt:

$$E : G = U(u) : V(v)\,.$$

Die rhombischen Parameter sind hier bestimmt durch

$$\bar{u} = \int \sqrt{U}\,du, \quad \bar{v} = \int \sqrt{V}\,dv)\,.$$

Die beiden Geradenscharen seien gegeben durch:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0, \tag{1}$$

$$x\cos\psi + y\sin\psi - q = 0, \tag{2}$$

wobei φ und p Funktionen von u allein, ψ und q Funktionen von v allein sind.

[1]) Die einschlägigen Arbeiten (*Lagally, Perron, Volk, Voß*) sind angeführt in der dem Schöpfer dieser Fragestellungen, *A. Voß*, gewidmeten Arbeit von *O. Volk*: Über die geodätisch-rhombischen Netze auf krummen Flächen, insbesondere auf Flächen konstanter Krümmung. (Ber. der Heidelb. Ak., math.-naturw. Kl., 1925, Abh. 13).

Mit Einführung der Strecken s (vom Fußpunkt des vom Nullpunkt auf eine Gerade (1) gefällten Lotes bis zu $P(x, y)$ und entsprechend t erhalten wir die doppelte Darstellung:

$$x = p\cos\varphi - s\sin\varphi = q\cos\psi - t\sin\psi,$$
$$y = p\sin\varphi + s\cos\varphi = q\sin\psi + t\cos\psi$$

und hieraus:

$$s = \frac{q - p\cos\omega}{\sin\omega}, \quad t = \frac{-p + q\cos\omega}{\sin\omega}, \quad \omega = \psi - \varphi.$$

Für das Bogenelement kommen die zwei Darstellungen:

$$dx^2 + dy^2 = (dp - s\,d\varphi)^2 + (p\,d\varphi + ds)^2$$
$$= (dq - t\,d\psi)^2 + (q\,d\psi + dt)^2,$$

die der Symmetrie wegen beide heranzuziehen sind.

Aus der ersten entnehmen wir

$$G = s_v^2$$

und aus der zweiten

$$E = t_u^2.$$

Notwendige und hinreichende Bedingung für das g.-rh. Netz ist also

$$t_u : s_v = U(u) : V(v)$$

oder

$$\frac{\partial^2 \lg}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{t_u}{s_v}\right) = 0. \tag{3}$$

Die hier auftretenden partiellen Differentialquotienten berechnen sich zu

$$s_v = \frac{(q' + p\sin\omega\psi')\sin\omega - (q - p\cos\omega)\cos\omega\cdot\psi'}{\sin^2\omega} = \frac{q' - t\psi'}{\sin\omega},$$

$$t_u = \frac{-p' + s\varphi'}{\sin\omega},$$

wobei in der ersten Formel die Akzente die gewöhnliche Differentiation nach v, in der zweiten nach u andeuten.

In der grundlegenden Differentialgleichung (3) können ihrem Baue nach s_v und t_u durch proportionale Größen ersetzt werden,

$$s_v \text{ durch } A = q'\sin\omega + \psi'(p - q\cos\omega),$$
$$t_u \text{ durch } B = -p'\sin\omega + \varphi'(q - p\cos\omega),$$

und (3) wird dann, ausführlich geschrieben:

$$\frac{A\,A_{uv} - A_u\,A_v}{A^2} = \frac{B\,B_{uv} - B_u\,B_v}{B^2}$$

oder nach elementarer Rechnung:

$$\frac{q''\psi' - q'\psi'' + q(\psi')^3}{A^3} = \frac{p''\varphi' - p'\varphi'' + p(\varphi')^3}{B^3}. \tag{4}$$

Die hier unterdrückte Rechnung würde sich noch vereinfachen, wenn man von vornherein in (1) φ, in (2) ψ als Parameter gewählt hätte. Das ist aber nicht geschehen, eben um die volle Allgemeinheit zu wahren.

2. Die Ausartungen.

Besteht die u-Schar aus Parallelen, so ist

$$\varphi = a, \quad \varphi' = 0, \quad p' \neq 0,$$

also

$$B = -p' \sin \omega \neq 0,$$

es muß also nach (4) sein

$$q'' \psi' - q' \psi'' + q(\psi')^3 = 0$$

und dann entweder

$$\psi = \beta \text{ (Parallelschar)},$$

oder aber es kann $v = \psi$ als Parameter eingeführt werden, und aus

$$q'' + q = 0$$

folgt dann

$$q = a \cos \psi + b \sin \psi,$$

d. h. die zweite Netzschar besteht aus Geraden durch einen Punkt.

Ebenso läßt sich zeigen, daß, wenn die eine Geradenschar ein eigentliches lineares Büschel ist, die andere ein eigentliches oder uneigentliches sein muß.

Hiermit sind die Ausartungen *grundsätzlich* erledigt, es sollen jetzt aber noch die rhombischen Netzparameter angegeben werden, was selbstverständlich Integrationen erfordert, abgesehen von dem trivialen Fall, wenn das Netz aus zwei Parallelbüscheln besteht.

Parameterwahl bei Geraden parallel zur y-Achse und Geraden durch den Nullpunkt.

Zunächst

$$x = u, \quad y = uv,$$

$$dx^2 + dy^2 = (1 + v^2) u^2 \left(\frac{du^2}{u^2} + \frac{dv^2}{1 + v^2} + \frac{2uv\,du\,dv}{u^2(1 + v^2)} \right).$$

Damit dann E und G einander gleich werden, muß

$$\bar{u} = \int \frac{du}{u}, \quad \bar{v} = \int \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}}$$

eingeführt werden. Die rhombischen Parameter sollen schließlich wieder mit u und v bezeichnet werden, also gesetzt werden:

$$x = e^u,$$
$$y = e^u \operatorname{sh} v,$$

und dies gibt

$$dx^2 + dy^2 = e^{2u} \operatorname{ch}^2 v \,(du^2 + dv^2 + 2\,du\,dv \operatorname{th} v).$$

Man liest dann auch den bekannten Satz heraus, daß die Diagonalkurven

$$u \pm v = \lg x \pm \operatorname{arg\,sh} \frac{y}{x} = c$$

oder

$$y \pm \sqrt{x^2 + y^2} = C$$

konfokale Parabeln sind.

Parameterwahl bei Geradenbüscheln durch die Punkte $y = 0, x = \pm a$.

Die entsprechende Rechnung führt auf die Darstellung

$$x = a\frac{\operatorname{sh} v + \operatorname{sh} u}{\operatorname{sh} v - \operatorname{sh} u}, \quad y = \frac{2a}{\operatorname{sh} v - \operatorname{sh} u},$$

und man erhält das rhombische Bogenelement

$$dx^2 + dy^2 = \frac{4a^2 \operatorname{ch}^2 u \operatorname{ch}^2 v}{(\operatorname{sh} v - \operatorname{sh} u)^2}\left(du^2 + dv^2 - \frac{2\,du\,dv}{\operatorname{ch} u \operatorname{ch} v}(1 + \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v)\right).$$

Es ist leicht abzulesen, daß hier die Diagonalkurven konfokale Ellipsen und Hyperbeln sind, was ja längst bekannt ist.

Nochmals sei hervorgehoben, daß die Bestimmung der rhombischen Parameter, also der geeignet zu wählenden Funktionen U und V der u und v — die einzige Stelle, an der Integrationen (Quadraturen) erforderlich sind — grundsätzlich nicht verlangt wird, wohl aber für die Anschauung, die Zeichnung des Netzes nicht entbehrt werden kann.

3. Der allgemeine Fall.

Nach Erledigung der Ausartungen ist jetzt der allgemeine Fall zu betrachten, daß weder die u-Schar noch die v-Schar ein lineares Strahlenbüschel ist.

In diesem Fall darf bei (1) $u = \varphi$, bei (2) $v = \psi$ als unabhängige Veränderliche genommen werden, so daß die Zähler in (4) werden:

$$q'' + q = \frac{d^2 q}{d\psi^2} + q, \quad p'' + p = \frac{d^2 p}{d\varphi^2} + p,$$

also bekanntlich die Krümmungsradien ϱ_2 und ϱ_1 der Stützkurven der beiden Geradenscharen.

Auch die Nenner lassen eine einfache Deutung zu: Ist OF_1 das vom Nullpunkt auf die φ-Gerade gefällte Lot, S_1 der Berührungspunkt mit der Stützkurve, so wird

$$S_1 P = s - p' = \frac{q - p\cos\omega - p'\sin\omega}{\sin\omega} = \frac{B}{\sin\omega}$$

und entsprechend

$$S_2 P = t - q' = \frac{-p + q\cos\omega - q'\sin\omega}{\sin\omega} = \frac{-A}{\sin\omega},$$

die Grundbedingung (4) wird also

$$\frac{\varrho_1}{(PS_1)^3} + \frac{\varrho_2}{(PS_2)^3} = 0, \tag{5}$$

und wir haben den Satz: *Bei einem rhombischen Geraden-Netz sind entweder beide Scharen lineare Büschel* (Nr. 2), *oder es besteht die Beziehung* (5).

Dabei bedeuten ϱ_1 und ϱ_2 die Krümmungsradien der Stützkurven, PS_1 und PS_2 die Strecken von P bis zu den Stützpunkten der Geraden u und v, d. h. den Berührungspunkten mit den Hüllkurven.

Diese geometrische Beziehung ist jetzt noch zu deuten und zu verwenden. Sie bedeutet, daß die beiden Krümmungselemente in Kegelschnittbindung stehen, d. h. einem und demselben Kegelschnitt angehören [1]).

(Das kann man elementar so zeigen: Jeder Kegelschnitt, der in $S_1(x = a, y = 0)$ die x-Achse und in $S_2(x = b\cos\alpha,\ y = b\sin\alpha)$ die Gerade OS_2, d. i.

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$$

berührt, ist gegeben durch

$$2y(x\sin\alpha - y\cos\alpha) + \varkappa g^2 = 0\,,$$
$$g \equiv (x - a)\,b\sin\alpha - y(b\cos\alpha - 1)\,,$$

und die Krümmungsradien werden in S_1 und S_2

$$\varrho_1 = \frac{-a}{\varkappa b^2\sin\alpha}\,, \qquad \varrho_2 = \frac{b}{\varkappa a^2\sin\alpha}\,,$$

also

$$\frac{\varrho_1}{a^3} + \frac{\varrho_2}{b^3} = 0\,,$$

womit die Bedeutung von (5) erwiesen ist.)

Es folgt also: Berührt die durch P gehende Netzgerade

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p(\varphi) = 0$$

ihre Stützkurve in S_1, die Netzgerade

$$x\cos\psi + y\sin\psi - q(\psi) = 0$$

ihre Stützkurve in S_2, so gehören, wenn das Netz rhombisch ist und nicht ausgeartet, die Krümmungselemente der Stützkurve paarweise einem Kegelschnitt an.

Daß dann das Geradennetz aus den Tangenten *eines* bestimmten Kegelschnittes bestehen muß, wird wohl als selbstverständlich erscheinen. Die Koppelung besteht zwischen je zwei Krümmungselementen der beiden Stützkurven. Es genügt aber schon die Bedingung, daß ein Krümmungselement mit allen übrigen in Kegelschnittsbindung steht, um nachzuweisen, daß ein Kegelschnitt vorliegt.

Die Kegelschnitte

$$x^2 + 2ay + y(2ux + vy) = 0$$

---

[1]) Die Größe

$$\lambda = \frac{\varrho_1}{(PS_1)^3}\cdot\frac{(PS_2)^3}{\varrho_2}$$

ist eine projektive Invariante der beiden Krümmungselemente und leicht als Doppelverhältnis zu deuten. Zwei die Strecke PS_1 in S_1, bez. PS_2 in S_2 berührende Krümmungselemente $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ bestimmen zwei Kegelschnitte, deren einer $\varkappa_1$ enthält und PS_2 in S_2 berührt, während der andere $\varkappa_2$ enthält und PS_1 in S_1 berührt. Jede Gerade durch P schneidet bekanntlich die Kegelschnitte in vier Punkten mit konstantem Doppelverhältnis, und dieses D.-V. drückt sich einfach durch λ aus. — In etwas anderer, weniger sinnfälliger, dafür gegen „Ausartungen“ wohlgerüsteter Gestalt findet sich die Invariante bei *E. Study* (Die Elemente zweiter Ordnung in der ebenen projektiven Geometrie, Berichte der math.-phys. Kl. der Sächs. Ak. d. W. 1901, 338 ff.).

haben bei gegebenem a alle dasselbe Krümmungselement im Nullpunkt. Wir haben jetzt eine Schmieghüllkurve zu suchen, vielmehr nachzuweisen, daß eine Kurve, die in jedem ihrer Punkte von einem Kegelschnitt dieser zweigliedrigen Schar oskuliert wird, einer dieser Kegelschnitte sein muß. Sind u und v Funktionen eines Parameters, so wird für die Hüllkurve

$$2\dot{u}x + \dot{v}y = 0\,.$$

Jedes Krümmungselement des Kegelschnittes (u, v) berechnet sich aus

$$xx' + ay' + u(xy' + yx') + vyy' = 0,$$
$$xx'' + (x')^2 + ay'' + u(xy'' + 2x'y' + yx'') + v(yy'' + (y')^2) = 0.$$

Bei der Hüllkurve ist

$$x\dot{x} + a\dot{y} + u(x\dot{y} + y\dot{x}) + vy\dot{y} + \frac{y}{2}(2\dot{u}x + \dot{v}y) = 0\,,$$

wobei der letzte Teil zu Null wird, und weiter

$$x\ddot{x} + (\dot{x})^2 + a\ddot{y} + u(x\ddot{y} + 2\dot{x}\dot{y} + x\ddot{y}) + \dot{u}(x\dot{y} + y\dot{x}) + \dot{v}y\dot{y} = 0.$$

Wegen der Schmiegungsforderung ist zu setzen

$$x' = \dot{x},\quad y' = \dot{y},\quad x'' = \ddot{x},\quad y'' = \ddot{y},$$

so daß die Gleichungen bleiben

$$2\dot{u}x + \dot{v}y = 0,$$
$$\dot{u}(x\dot{y} + y\dot{x}) + \dot{v}y\dot{y} = 0\,.$$

Also ist entweder

$$\dot{u} = \dot{v} = 0,$$

d. h. u und v sind Konstanten, und die Kurve, deren Krümmungselemente mit einem festen Kr. in Kegelschnittbindung stehen, ist ein Kegelschnitt — was wir beweisen wollen — oder aber es käme

$$2xy\dot{y} - y(x\dot{y} + y\dot{x}) = y(x\dot{y} - y\dot{x}) = 0,$$

d. h. die Träger der Krümmungselemente würden alle auf der x-Achse liegen oder auf einer anderen Geraden durch den Nullpunkt, was ausgeschlossen ist.

Hiermit ist dann vollständig erwiesen: *Die beiden Geraden-Scharen des rhombischen Netzes sind, sofern nicht die Ausartung* (Nr. 2) *vorliegt, Tangenten eines und desselben Kegelschnittes.*

Von der Einführung der rhombischen Parameter, wie sie in (Nr. 2) durchgeführt ist, sehen wir hier ab, da diese Rechnung ganz entsprechend verläuft. Sie führt auf elliptische Funktionen, und es kann aus dem elementar zu erweisenden Satz, daß die Diagonalkurven zum Stützkegelschnitt konfokale Kegelschnitte sind, ein elementarer Beweis des Additionstheoremes gewonnen werden, was hier nicht weiter verfolgt werden soll.

4. Gnomonische Projektion.

Die Bestimmung der g.-rh. Netze auf Flächen konstanter Krümmung kann, was bisher nirgends betont worden ist, auf das ebene Problem zurückgeführt werden. Die Fläche konstanter Krümmung $K = k^2$ ist abwickelbar auf die Kugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = k^2,$$

und diese Kugel wird durch

$$\xi : \eta : \zeta : 1 = kx : ky : k^2 : (x^2 + y^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}$$

auf die Ebene

$$z = k$$

perspektivisch (gnomonisch) abgebildet, wobei die geodätischen Linien (Hauptkreise) in Gerade übergehen.

Die Aufgabe, die g.-rh. Netze auf der Kugel und damit auf allen Flächen konstanter Krümmung zu bestimmen, wird also darauf zurückgeführt, in

$$\frac{x^2 + y^2 + k^2}{k^2}(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) = (x^2 + y^2 + k^2)(dx^2 + dy^2) - (x\,dx + y\,dy)^2$$

x und y so als Funktionen von u und v zu bestimmen, daß in der quadratischen Differentialform die Koeffizienten $\overline{E}$ von du^2 und $\overline{G}$ von dv^2 sich verhalten wie Funktionen $U(u)$ zu $V(v)$ und daß zugleich beide Kurvenscharen aus Geraden bestehen.

Mit Verwendung der Bezeichnungen und Ergebnisse von Nr. 1 dürfen wir aber schreiben

$$dx^2 + dy^2 = (t_u\,du)^2 + (s_v\,dv)^2 + 2(\cdots)\,du\,dv,$$
$$x^2 + y^2 = p^2 + s^2 = q^2 + t^2,$$
$$(x\,dx + y\,dy)^2 = (p\,dp + s\,ds)^2 = (q\,dq + t\,dt)^2,$$

wobei wieder zu beachten ist, daß p nur von u, q nur von v abhängt. Demnach wird

$$\overline{E} = (q^2 + t^2 + k^2)\,t_u^2 - t^2 t_u^2 = (q^2 + k^2)\,t_u^2,$$
$$\overline{G} = (p^2 + s^2 + k^2)\,s_v^2 - s^2 s_v^2 = (p^2 + k^2)\,s_v^2,$$

und die Forderung

$$\overline{E} : \overline{G} = U(u) : V(v)$$

führt wieder auf

$$\frac{\partial^2 \lg}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{t_u}{s_v}\right) = 0, \tag{3}$$

also folgt nach Nr. 3, *daß die g.-rh. Netze der Ebene* ($z = k$) *gerade die gnomonischen Projektionen der g.-rh. Netze der Kugel*

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = k^2$$

sind.

Demgemäß bestehen die g.-rh. Netze der Flächen konstanter Krümmung entweder aus geodätischen Linien durch zwei Punkte, oder aber sie umhüllen, da unsere Projektion Kegelschnitte in Kegelschnitte überführt, einen Kegelschnitt.

Eine gesonderte Behandlung der Flächen konstanter Krümmung erübrigt sich also, da der hier gewählte Weg die ganze Frage auf das in der Ebene erledigte Problem zurückwirft.

Zur Erzeugung der Primfunktion von *Prym* und *Rost*.

Von *Otto Haupt* in Erlangen.

1. Vorbemerkung.

Im 2. Teil ihrer „Theorie der *Prym*schen Funktionen 1. Ordnung“ [1]) konstruieren die Herren *Prym* und *Rost* eine Funktion $P\begin{vmatrix}\eta\\ z\\ 0\end{vmatrix}$, welche [2]) — konkret gesprochen — relativ zu einer gegebenen, der z-Ebene überlagerten (geschlossenen) *Riemann*schen Fläche $\mathfrak{T}$ vom Geschlechte p überall regulär (also insbesondere relativ $\mathfrak{T}$ unverzweigt) ist — mit Ausnahme der Stelle η, wo sie logarithmisch unendlich wird; die verschiedenen Zweige von $P\begin{vmatrix}\eta\\ z\\ 0\end{vmatrix}$, welche man durch Überschreiten der Querschnitte erhält, unterscheiden sich nur um additiv hinzutretende Konstanten bzw. Integrale 1. Gattung. Es ist dann $e^{-P\begin{vmatrix}\eta\\ z\\ 0\end{vmatrix}}$ überall auf $\mathfrak{T}$ regulär und besitzt in der einfach zusammenhängenden Fläche $\mathfrak{T}'$ die (einzige) Nullstelle η („Primfunktion“ der Fläche $\mathfrak{T}$).

$P\begin{vmatrix}\eta\\ z\\ 0\end{vmatrix}$ wird [1]) aus einem Integral 3. Gattung durch gewisse Grenzübergänge und Integrationen gewonnen. Zweck der folgenden Zeilen ist, $P\begin{vmatrix}\eta\\ z\\ 0\end{vmatrix}$ *durch Lösung einer Randwertaufgabe* unmittelbar zu gewinnen. Dieses Verfahren kann ohne weiteres auch auf allgemeinere Randbedingungen übertragen werden, was zum Schlusse kurz angedeutet wird.

2. Definition von $P\begin{vmatrix}\eta\\ z\\ 0\end{vmatrix}$.

Wir geben zunächst, soweit nötig, die von *Prym* und *Rost* gebrauchten Bezeichnungen an: Mit a_ν, b_ν, c_ν $(\nu = 1, \ldots, p)$ bezeichnen wir ein kanonisches Schnittsystem [3]) auf $\mathfrak{T}$, mit $\mathfrak{T}'$ die durch a_ν, b_ν, c_ν $(\nu = 1, \ldots, p)$ berandete, einfach zusammenhängende Fläche. Insbesondere soll das Schnittsystem den

[1]) Leipz. 1911. (Im folgenden zitiert mit P. R., II), S. 93—102.
[2]) P. R., II, S. 100.
[3]) vgl. P. R., II, S. 94, Fig. 1.

Punkt η nicht enthalten, in welchem $P\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}_0$ wie $\log\frac{1}{z_\eta}$ unendlich wird, unter z_η eine zu η gehörige Ortsuniformisierende verstanden; ferner soll vom gemeinsamen Treffpunkt der c_ν nach η ein geeigneter Schnitt l_η gelegt sein, welcher im Innern von $\mathfrak{T}'$ verläuft. Unterscheidet man positive und negative „Ufer" der Schnitte, so kann man z. B. mit $P\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}_0^+$ bzw. $P\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}_0^-$ die Werte des auf $\mathfrak{T}'$ beschränkten Zweiges von $P\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}_0$ in „gegenüberliegenden" Uferpunkten eines Schnittes bezeichnen.

Wir bezeichnen ferner mit $u_\varrho|z|$ ein *Abel*sches Integral 1. Gattung auf $\mathfrak{T}$, welches so normiert ist, daß [1])

$$\text{längs } a_\nu: \qquad u_\varrho|z|^+ = u_\varrho|z|^- + \delta_{\varrho\nu}\pi i,\ \varrho,\nu = 1,\ldots,p,\ \delta_{\varrho\nu} = \begin{cases}0 \text{ für } \varrho \neq \nu\\ 1 \text{ für } \varrho = \nu\end{cases},$$

$$(1_\varrho)\quad \text{längs } b_\nu: \qquad u_\varrho|z|^+ = u_\varrho|z|^- + a_{\varrho\nu},$$

$$\text{längs } c_\nu \text{ und } l_\eta: \quad u_\varrho|z|^+ = u_\varrho|z|^-.$$

Das Verhalten von $P\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}_0$ an den Querschnitten läßt sich jetzt so schreiben [2]):

$$\text{längs } a_\nu: \quad P\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}_0^+ = P\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}_0^-,$$

$$\text{längs } b_\nu: \quad P\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}_0^+ = P\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}_0^- + \frac{2}{p}u_\nu|z|^- - 2u_\nu|\eta| - \frac{2k_\nu}{p} + \frac{a_{\nu\nu}}{p},$$

$$(2_0)\qquad\qquad \nu = 1,\ldots,p,$$

$$\text{längs } c_\nu: \quad P\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}_0^+ = P\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}_0^- - \frac{2\pi i}{p},$$

$$\text{längs } l_\eta: \quad P\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}_0^+ = P\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}_0^- + 2\pi i.$$

Dabei ist k_ν eine gewisse, von der Beschaffenheit von $\mathfrak{T}$ und von der Wahl des Querschnittsystems, nicht von η abhängige [3]) Konstante. Übrigens gilt [2]):

$$(2_0')\qquad 2k_\nu = \frac{2}{\pi i}\sum_{\varrho=1}^{p}{}'\int_{b_\varrho^+}^{+} u_\nu|\xi|\,du_\varrho|\xi| - \pi i - a_{\nu\nu}, \qquad \nu = 1,\ldots,p.$$

Der Akzent am Summenzeichen deutet an, daß bei der Summation $\varrho = \nu$ auszuschließen ist; $\int_{b_\varrho^+}^{+}$ besagt, daß längs des positiven Ufers von b_ϱ im positiven Sinne zu integrieren ist [4]).

---

[1]) P. R., II, S. 85, (1)

[2]) P. R., II, S. 100; vgl. auch im Text oben Nr. 6.

[3]) P. R., II, S. 132, wo diese Abhängigkeit genau bestimmt ist.

[4]) Die in $P\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}_0$ noch willkürliche, additive Konstante wird (P. R. II, S. 100) durch eine Beziehung (3_0) festgelegt.

3. Diskussion der Randbedingungen.

Die Frage nach der Existenz von $P\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|_0$ behandeln wir zweckmäßigerweise zunächst als speziellen Fall der folgenden, etwas allgemeineren Aufgabe:

Eine auf $\mathfrak{T}$ relativ unverzweigte, nur an einer Stelle η logarithmisch singuläre, im übrigen auf $\mathfrak{T}$ reguläre Funktion $G\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$ zu bestimmen, welche die folgenden Randbedingungen erfüllt:

$$
\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu\text{:}\quad G\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|^{+} = G\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|^{-} + \mathfrak{A}_\nu|z|^{-},\\
&\text{längs } b_\nu\text{:}\quad G\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|^{+} = G\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|^{-} + \mathfrak{B}_\nu|z|^{-}, \qquad \nu = 1, \ldots, p,\\
&\text{längs } c_\nu\text{:}\quad G\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|^{+} = G\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|^{-} + \mathfrak{C}_\nu,\\
&\text{längs } l_\eta\text{:}\quad G\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|^{+} = G\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|^{-} + 2\pi i.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Dabei bedeuten $\mathfrak{A}_\nu|z|$ und $\mathfrak{B}_\nu|z|$ die, auf $\mathfrak{T}'$ beschränkten Zweige von *Abel*schen Integralen 1. Gattung, können also insbesondere zum Teil Konstante sein. Die $\mathfrak{C}_\nu$ sind als Konstante vorausgesetzt. Nicht *alle* $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{C}_\nu$ können konstant sein, weil eine „Eigenfunktion" des Problems vorhanden ist (nämlich die Konstante) und infolgedessen [1]) ein, nur an einer Stelle logarithmisch singulär werdendes, sonst reguläres *Abel*sches Integral 3. Gattung nicht existiert.

Wir haben jetzt vor allem nachzusehen, wann obige Randbedingungen überhaupt von einer Funktion erfüllt werden können, welche im Kreuzungspunkt von a_ν, b_ν, c_ν $(\nu = 1, \ldots, p)$, sowie im Kreuzungspunkt von $c_1, \ldots, c_\rho$ und l_η relativ $\mathfrak{T}$ unverzweigt ist.

Wir erhalten durch leichte Rechnung

$$\mathfrak{C}_\nu = \alpha_\nu - \beta_\nu, \qquad \nu = 1, \ldots, p, \tag{4}$$

$$2\pi i + \sum_{\nu=1}^{p} \mathfrak{C}_\nu = 0, \tag{5}$$

wobei α_ν (bzw. β_ν) die Periode von $\mathfrak{A}_\nu$ (bzw. $\mathfrak{B}_\nu$) am Schnitte b_ν (bzw. a_ν) bedeutet.

Fordert man jetzt [vgl. (2_0)] *speziell* $\mathfrak{A}_\nu|z| = A_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu|z| = \lambda u_\nu|z| + B_\nu$, wo A_ν, B_ν und λ Konstante bedeuten, so ergibt (4) unter Berücksichtigung von (1_ϱ)

$$\mathfrak{C}_\nu = -\lambda\pi i, \tag{6}$$

und folglich liefert (5)

$$\lambda = \frac{2}{p}, \qquad \mathfrak{C}_\nu = -\frac{2\pi i}{p}, \tag{7}$$

womit wir auf die Randbedingungen (2_0) geführt sind.

[1]) vgl. z. B. Heidelberger Berichte, 1920, 16. Abhandlung, S. 27/28. [Im folgenden zitiert mit H]. Der Satz für den Fall der „ausgezeichneten Charakteristik" (wie er oben im Text vorliegt) ist dort allerdings nicht ausdrücklich ausgesprochen.

4. Gedankengang der Konstruktion von $P\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|_0$.

$P\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|_0$ $\left(\text{oder allgemeiner } G\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|\right)$ unterscheidet sich von den *Abel*schen Integralen dadurch, daß *die Funktion beim Überschreiten der Querschnitte* nicht lediglich konstante Perioden *ausscheidet*, sondern *variable, vorgegebene Perioden* [1]), wobei natürlich (4) und (5) erfüllt sein müssen.

Um $P\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|_0$ $\left(\text{bzw. } G\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|\right)$ zu konstruieren, kann man daher (wie in Nr. 5 und 6 noch näher ausgeführt wird) so vorgehen:

I. Man bestimmt eine Potentialfunktion w, d. h. eine Lösung von $\Delta w = 0$, welche auf $\mathfrak{T}$ regulär (insbesondere relativ unverzweigt) ist, ausgenommen die Stelle η, wo $w - \log\left(\frac{1}{r_\eta}\right)$ regulär bleibt ($r_\eta = |z_\eta|$). Außerdem soll w diejenigen Randbedingungen erfüllen, welche aus (3) dadurch entstehen, daß man statt $\mathfrak{A}_\nu|z|$, $\mathfrak{B}_\nu|z|$ und $\mathfrak{C}_\nu$ deren reelle Teile $\Re(\mathfrak{A}_\nu)$ usw. nimmt. Für die $\Re(\mathfrak{A}_\nu)$ usw. ist wieder (4) erfüllt, während (5) ersetzt wird durch

$$(5') \qquad \sum_{\nu=1}^{p} \Re(\mathfrak{C}_\nu) = 0.$$

II. Man bildet eine zu w konjugierte Potentialfunktion $\tilde{w} = -\int \frac{\partial w}{\partial n}\, ds$. Dann liefert $w + i\tilde{w}$ die gesuchte Funktion $G\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$, deren Perioden sich von $\mathfrak{A}_\nu|z|$ bzw. $\mathfrak{B}_\nu|z|$ allerdings um gewisse additive Konstante unterscheiden werden; die $\mathfrak{A}_\nu|z|$ und $\mathfrak{B}_\nu|z|$ können eben nicht völlig willkürlich vorgegeben werden, ebensowenig wie die Perioden eines *Abel*schen Integrals 1. Gattung.

5. Konstruktion der Potentialfunktion w.

Wir beschränken uns zur Vereinfachung der Rechnungen auf die Konstruktion von $P\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|_0$. Die Randbedingungen für die zunächst gesuchte Potentialfunktion w seien:

längs a_ν: $w^+ = w^-$, längs b_ν: $w^+ = w^- + \frac{2}{p}\Re(u_\nu|z|^-)$; längs c_ν und l_η: $u^+ = u^-$.

Die Existenzsätze für Potentialfunktionen mit konstanten Perioden [2]) lassen sich auch auf den Fall variabler Perioden $\mathfrak{A}_\nu|z|$ usw. ausdehnen. Mithin ist *für*

[1]) Statt dessen könnten wir die durch (2_0) gestellte Randwertaufgabe auch als ein *Riemannsches Problem* $(p+1)$*-ter Ordnung* auffassen, nämlich als die Aufgabe, die $p+1$ Funktionen $P\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|_0$ und $u_\nu|z|$ $(\nu = 1, \ldots, p)$ zu bestimmen, welche an den Schnitten die linearen Transformationen (1_ϱ) und (2_0) erleiden. Diese Auffassung ist die allgemeinere. Wir haben im Texte der einfacheren Darstellung wegen die andere Auffassung zu Grunde gelegt. Vgl. auch Schlußbemerkung.

[2]) vgl. z. B. H., S. 22.

die Existenz von w notwendig und hinreichend, daß diejenigen Bedingungen erfüllt sind, welche sich aus dem Greenschen Satz, angewandt auf w und alle Eigenfunktionen U unseres Problems ergeben. Da im vorliegenden Fall $U = \text{konst.}$ ist, so haben wir die einzige Bedingung

$$(8) \qquad 2\pi = -\sum_{\nu=1}^{p}\left[\int_{b_\nu^+}^{+}\frac{\partial\omega_\nu}{\partial n}\,ds - \int_{b_\nu^-}^{+}\frac{\partial\omega_\nu}{\partial n}\,ds\right]$$

$$= \frac{2}{p}\sum_{\nu=1}^{p}\int_{b_\nu^+}^{+}\frac{\partial\omega_\nu}{\partial n}\,ds = -\frac{2}{p}\sum_{\nu=1}^{p}\int_{b_\nu^+}^{+}d\psi_\nu,$$

wobei $\omega_\nu = \Re(u_\nu|z|)$ und ψ_ν eine zu ω_ν konjugierte Potentialfunktion ist.

Nun gilt aber [1])

$$\sum_{\nu=1}^{p}\int_{b_\nu^+}^{+}du_\nu = \sum_{\nu=1}^{p}\int_{b_\nu^+}^{+}(d\omega_\nu + i\,d\psi_\nu) = -p\pi i,$$

weil $\int_{b_\nu^+}^{+}du_\nu$ die negativ genommene Periode von u_ν am Schnitte a_ν liefert, also $-\pi i$ ist (vgl. (1_ϱ)). Folglich ist $\sum_{\nu=1}^{p}\int_{b_\nu^+}^{+}d\psi_\nu = -p\pi$ und somit (8) wirklich erfüllt.

6. Konstruktion von $P\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}_0$.

$W = w + i\tilde{w}$ (vgl. Nr. 4, II) verhält sich nun so: längs a_ν: $W^+ = W^- + A_\nu$, längs b_ν: $W^+ = W^- + \frac{2}{p}u_\nu|z|^- + B_\nu$, während an den Schnitten $\mathfrak{C}_\nu$ und l_η zufolge (7) (Nr. 3) die Bedingungen (2_0) bereits erfüllt sind. Durch Addition eines passend gewählten Integrals 1. Gattung kann man $A_\nu = 0$ machen ($\nu = 1, \ldots, p$), so daß dann, abgesehen von einer additiven Konstanten, W mit $P\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}_0$ identisch ist. Die Periode B_ν kann man mittelst des *Cauchy*schen Integralsatzes, angewandt auf $P\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}_0 du_\nu$, bestimmen [2]); bei geeigneter Normierung [3]) der in $u_\nu|z|$ noch willkürlichen, additiven Konstanten wird man dann auf eine mit $(2_0')$ (Nr. 2) gleichwertige Beziehung geführt.

7. Schlußbemerkung.

Zufolge der in Nr. 3 und 4 angestellten Betrachtungen erscheint $P\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}_0$ als eine spezielle (nur an einer Stelle von $\mathfrak{T}'$ logarithmisch singuläre) Funktion $G\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}$ mit variablen Perioden.

[1]) P. R., II, S. 100. [2]) vgl. auch P. R., II, S. 85, (F_3). [3]) P. R., II, S. 86, (2).

Allgemeiner ist die in Fußnote 1, S. 59 angegebene Auffassung. Danach erscheint nämlich die Einführung von $P\begin{vmatrix}\eta\\ z\end{vmatrix}_0$ als Spezialfall folgender Aufgabe:

Die Bestimmung von n Funktionen mit vorgeschriebenen Übergangsubstitutionen (beim Überschreiten der Querschnitte) [Problem n-ter Ordnung], sei infolge des Auftretens von Eigenfunktionen unmöglich, falls gewisse Singularitäten für die gesuchten Funktionen noch vorgeschrieben sind. Man soll das Problem n-ter Ordnung so zu einem Problem $(n+k)$-ter Ordnung „erweitern", daß Lösungen mit den gesuchten Singularitäten wirklich auftreten. Dabei könnte etwa noch die Forderung gestellt werden, k möglichst klein zu wählen ($n \geqq 1$, $k \geqq 1$).

Universität Erlangen, mathematisches Seminar, November 1926.

PERIODICAL ROOM
GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.

NOV 1 1 1927

JUBILÄUMSBAND II

AUS ANLASS DES 100 JÄHRIGEN BESTEHENS

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Hasse, Schaefer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 158.

Heft 2.

Mit Bildern von Hesse, Cayley, Hermite und Eisenstein.

Ausgegeben den 14. Oktober.

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG, VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1927

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 158. Heft 2.

(Jubiläumsband II.)

Mit Bildern von Hesse, Cayley, Hermite und Eisenstein.

Inhaltsverzeichnis.

Schur J., Über die reellen Kollineationsgruppen, die der symmetrischen oder der alternierenden Gruppe isomorph sind . . . . . Seite 63

Lichtenstein, Leon, Zur Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus . . . . . — 80

Schottky, Friedrich, Über die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen, denen die sechs hyperelliptischen Quotienten $\frac{\sigma_{\alpha\beta}(u, v)}{\sigma(u, v)}$ $(\alpha, \beta = \underset{\alpha \leq \beta}{1, 2, 3, 4})$ genügen . . . . . — 92

Hausdorff, F., *Lipschitz*sche Zahlensysteme und *Study*sche Nablafunktionen — 113

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Diesem Heft liegt ein Prospekt der Verlagsbuchhandlung Ferdinand Dümmler in Bonn bei.

Ludwig Otto Hesse
geb. 22. April 1811, gest. 4. August 1874.

Arthur Cayley
geb. 16. August 1821, gest. 26. Januar 1895.

Charles Hermite
geb. 25. Dezember 1822, gest. 14. Januar 1901
(aus Acta mathematica 1882–1912, Table générale des Tomes 1–35)

Gotthold Friedrich Max Eisenstein
geb. 16. April 1823, gest. 11. Oktober 1852.

Band 158. Heft 2.

(Jubiläumsband II.)

Mit Bildern von Hesse, Cayley, Hermite und Eisenstein.

Inhaltsverzeichnis.

Schur, J., Über die rechten Kollineationsgruppen, die der symmetrischen oder der alternierenden Gruppe isomorph sind . . . . . Seite 68

Lichtenstein, Leon, Zur Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus . . . . . — 80

Schottky, Friedrich, Über die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen, denen die sechs hyperelliptischen Quotienten $\frac{\sigma_{\alpha\beta}(v,w)}{\sigma(v,w)}$ $(\alpha,\beta = 1,2,3,4)$ genügen . . . . . — 92

Hausdorff, Felix, Legendresche Zahlensysteme und Stirlingsche Nahlafunktionen . . . . . — 113

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, bitten wir die Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Den Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei; weitere gegen Berechnung.

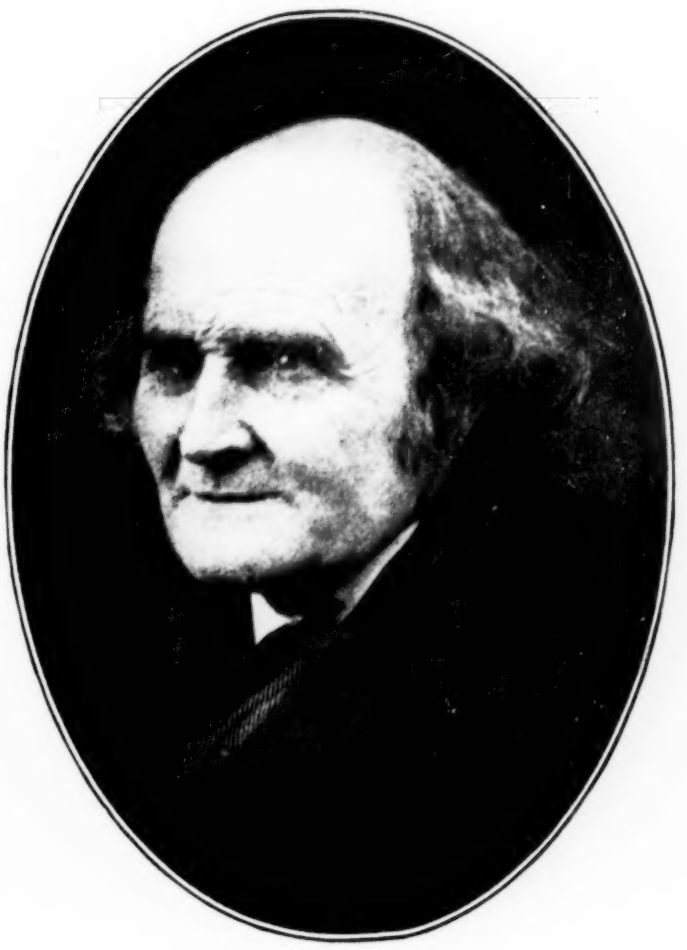
Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Diesem Heft liegt ein Prospekt der Verlagsbuchhandlung Ferdinand Dümmler in Bonn bei.

Ludwig Otto Hesse
geb. 22. April 1811, gest. 4. August 1874.



Arthur Cayley
geb. 16. August 1821, gest. 26. Januar 1895.

Charles Hermite
geb. 25. Dezember 1822, gest. 14. Januar 1901
(aus Acta mathematica 1882—1912, Table générale des Tomes 1—35).

Gotthold Friedrich Max Eisenstein
geb. 16. April 1823, gest. 11. Oktober 1852.

Über die reellen Kollineationsgruppen, die der symmetrischen oder der alternierenden Gruppe isomorph sind.

Von *J. Schur* in Berlin.

Die symmetrische Gruppe mit n Vertauschungsziffern wird im folgenden mit $\mathfrak{S}_n$, die alternierende mit $\mathfrak{A}_n$ bezeichnet. Die sämtlichen Darstellungen von $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{A}_n$ durch homogene lineare Substitutionen hat *Frobenius* [1]) bestimmt. Die Darstellungen von $\mathfrak{S}_n$ führen auf ganzzahlige Substitutionsgruppen, die sich nach einem relativ einfachen Verfahren rechnerisch herstellen lassen [2]); die Darstellungen von $\mathfrak{A}_n$ lassen sich mit Hilfe der von $\mathfrak{S}_n$ ohne Mühe ableiten. Komplizierter verhalten sich die Darstellungen von $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{A}_n$ als (eigentliche) Kollineationsgruppen. Eine vollständige Übersicht über diese Gruppen habe ich in einer früheren Arbeit [3]) gewonnen. Mein Hauptresultat über $\mathfrak{S}_n$ lautet: Jeder Zerlegung

$$n = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m \qquad (\nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_m > 0)$$

in positive ganzzahlige Summanden entspricht eine mit $\mathfrak{S}_n$ isomorphe irreduzible Kollineationsgruppe $\mathfrak{K}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$ des Grades

$$f_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m} = 2^{\left[\frac{n-m}{2}\right]} \frac{n!}{\nu_1!\, \nu_2! \cdots \nu_m!} \prod_{\alpha<\beta} \frac{\nu_\alpha - \nu_\beta}{\nu_\alpha + \nu_\beta},$$

die sich für $n > 3$ nicht als Gruppe von $n!$ linearen homogenen Substitutionen schreiben läßt. Jede andere mit $\mathfrak{S}_n$ isomorphe Kollineationsgruppe läßt sich durch eine lineare Transformation der Variabeln in gewisse unter den Gruppen $\mathfrak{K}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$ zerfällen.

Die Frage nach dem einfachsten Rationalitätsbereich, in dem die Gruppe $\mathfrak{K}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$ dargestellt werden kann, scheint schwierig zu sein. Dagegen läßt sich die Realitätsfrage vollständig erledigen. Im folgenden werde ich beweisen:

[1]) „Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe", Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1900, S. 516—534, und „Über die Charaktere der alternierenden Gruppe", ebenda, 1901, S. 303—315.

[2]) Vgl. meine Arbeit, „Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare Substitutionen", ebenda, 1908, S. 664—678.

[3]) „Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen", dieses Journal Bd. 139 (1911), S. 155—250. — Im folgenden wird diese Arbeit kurz mit D. zitiert.

I. *Die Gruppe $\mathfrak{R}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$ läßt sich für*

$$n - m \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 6,\ 7 \pmod 8$$

und nur in diesen Fällen reell wählen.

Ein ähnlich einfaches Resultat ergibt sich auch für die mit $\mathfrak{A}_n$ isomorphen irreduziblen Kollineationsgruppen (§ 7).

Aus I ergibt sich insbesondere die bemerkenswerte Tatsache, daß nur in den Fällen

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 9,\ 10,\ 11,\ 19$$

jede mit $\mathfrak{S}_n$ isomorphe Kollineationsgruppe durch eine lineare Transformation der Veränderlichen in eine reelle Gruppe übergeführt werden kann.

Der Beweis des Satzes I beruht auf dem von *Frobenius* und mir angegebenen Kriterium: Ist $\mathfrak{H}$ eine endliche irreduzible Gruppe linearer homogener Substitutionen der Ordnung h mit dem Charakter $\chi(R)$, so wird

$$\frac{1}{h}\sum_R \chi(R^2) = 0,\ 1 \text{ oder } -1. \tag{1}$$

Der Wert 0 ergibt sich, wenn nicht alle h Zahlen $\chi(R)$ reell sind; sind sie alle reell, so läßt sich $\mathfrak{H}$ dann und nur dann durch eine lineare Transformation der Variabeln in eine reelle Gruppe überführen, wenn die Summe (1) den Wert 1 hat [1]).

Den Ausdruck (1) nenne ich im folgenden die *Signatur* des Charakters $\chi(R)$ und bezeichne ihn mit sign χ.

§ 1. Umformung der Ausdrücke für die Signaturen.

Entspricht in einer Darstellung der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ durch reelle Kollineationen f-ten Grades der Permutation P die Kollineation

$$x'_\varkappa = \frac{a_{\varkappa 1}x_1 + \cdots + a_{\varkappa, f-1}x_{f-1} + a_{\varkappa f}}{a_{f1}x_1 + \cdots + a_{f, f-1}x_{f-1} + a_{ff}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, f-1)$$

und bezeichnet man die Matrix $(a_{\varkappa\lambda})$ mit (P), so erzeugen die Kommutatorelemente

$$(P)(Q)(P)^{-1}(Q)^{-1} \tag{2}$$

eine mit der Darstellungsgruppe $\mathfrak{B}_n$ von $\mathfrak{A}_n$ isomorphe Gruppe. Ist ferner T die Transposition (1, 2), so läßt sich der bei (T) zur Verfügung stehende Proportionalitätsfaktor reell so wählen, daß $(T)^2$ entweder $-E$ oder $+E$ wird. Im ersten Fall erzeugen die Matrizen (2) zusammengenommen mit (T) eine mit $\mathfrak{T}_n$, im zweiten Fall eine mit $\mathfrak{T}'_n$ homomorphe Gruppe. Hierbei bedeuten $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{T}'_n$ die beiden Darstellungsgruppen von $\mathfrak{S}_n$ (vgl. D., Abschnitt I).

Um daher alle reellen Darstellungen von $\mathfrak{S}_n$ durch Kollineationen zu erhalten, hat man nur die reellen Darstellungen der Gruppen $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{T}'_n$ durch lineare homogene Substitutionen zu untersuchen. Es handelt sich für uns also nur darum, die Signaturen der in D. bestimmten einfachen Charaktere $\chi(R)$ und $\chi'(R)$ der Gruppen

---

[1]) *G. Frobenius* und *J. Schur*, „Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen", Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1906, S. 186—208.

$\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{T}_n'$ zu berechnen. Hierbei haben wir uns auf das Studium der Charaktere zweiter Art zu beschränken, bei denen, wenn J das invariante Element (der Ordnung 2) bedeutet,

$$\chi(J) = -\chi(E), \quad \text{bzw.} \quad \chi'(J) = -\chi'(E)$$

wird.

Eine Hauptrolle spielt hier wie in D. der Hauptcharakter zweiter Art (des Grades $2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$). Er wird im folgenden mit $\zeta(R)$ bzw. $\zeta'(R)$ bezeichnet.

Einer Permutation P von $\mathfrak{S}_n$ entsprechen in $\mathfrak{T}_n$ zwei Elemente P' und JP'. Für jeden Charakter zweiter Art $\chi(R)$ wird $\chi(JP') = -\chi(P')$. Für gerade Permutationen P werden diese Zahlen gleich 0, sobald P einen Zyklus gerader Ordnung enthält. Die übrigen geraden Permutationen, die also nur Zykeln ungerader Ordnung enthalten, mögen als *Hauptpermutationen* bezeichnet werden. *Wir denken uns nun die Elemente P' so gewählt, daß insbesondere für jede Hauptpermutation $\zeta(P') > 0$ wird.* Sind dann P und Q zwei in $\mathfrak{S}_n$ ähnliche Hauptpermutationen, so sind auch P' und Q' in $\mathfrak{T}_n$ ähnliche Elemente. Für jeden Charakter $\chi(R)$ von $\mathfrak{T}_n$ schreibe ich kurz $\chi(P') = \chi(P)$.

Ist nun $\chi(R)$ ein einfacher Charakter zweiter Art von $\mathfrak{T}_n$, so wird

$$\operatorname{sign}\chi = \frac{1}{2\,n!}\sum_R \chi(R^2) = \frac{1}{n!}\sum_P \chi(P'^2),$$

wo R alle Elemente von $\mathfrak{T}_n$ und P alle Permutationen von $\mathfrak{S}_n$ durchläuft. In der zweiten Summe sind nur diejenigen Permutationen P zu berücksichtigen, für die P^2 eine Hauptpermutation wird. Das ist nur dann der Fall, wenn P keinen Zyklus enthält, dessen Ordnung durch 4 teilbar ist. Die Gesamtheit dieser Permutationen bezeichne ich mit $\mathfrak{Z}$.

Ist nun $P^2 = Q$, so wird $P'^2 = F_P Q'$, wobei F_P entweder E oder J ist. Versteht man unter $\varrho(P)$ den Wert 1 oder -1, je nachdem $F_P = E$ oder $F_P = J$ ist, so wird

$$\operatorname{sign}\chi = \frac{1}{n!}\sum_P{}' \varrho(P)\chi(P^2),$$

wo P alle Permutationen des Komplexes $\mathfrak{Z}$ durchläuft.

Analoges gilt für die Gruppe $\mathfrak{T}_n'$. Die den $\varrho(P)$ entsprechenden Vorzeichen mögen bei $\mathfrak{T}_n'$ mit $\varrho'(P)$ bezeichnet werden.

Zu beachten ist, daß für je zwei ähnliche Permutationen P und P_1 von $\mathfrak{Z}$ offenbar

$$\varrho(P) = \varrho(P_1), \qquad \varrho'(P) = \varrho'(P_1) \tag{3}$$

wird.

§ 2. Berechnung der Vorzeichen $\varrho(P)$ und $\varrho'(P)$.

Zerfällt die Permutation P in a_1 Zykeln der Ordnung 1, ferner a_2 Zykeln der Ordnung 2 usw., so will ich sagen, P sei vom Typus

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{4}$$

Zwei Permutationen von gleichem Typus sind in $\mathfrak{S}_n$ einander ähnlich. Ich setze noch

$$a = \sum (a_{8\lambda+1} + a_{8\lambda+7}), \quad b = \sum (a_{8\lambda+3} + a_{8\lambda+5}),$$
$$d = \sum (a_{8\lambda+2} - a_{8\lambda+6}).$$

Es gilt dann der Satz:

II. *Gehört P zum Komplex $\mathfrak{Z}$, d. h. sind die Zahlen $a_{i\lambda}$ sämtlich gleich Null, so wird*

$$\varrho(P) = (-1)^{b+\frac{d^2+d}{2}} = \sigma(P), \tag{5}$$

$$\varrho'(P) = (-1)^{b+\frac{d^2-d}{2}} = \sigma'(P). \tag{6}$$

Der Beweis soll in einer Reihe von Einzelschritten erbracht werden.

1. Wegen (3) genügt es, allein den Fall zu behandeln, daß P^2 in lauter Zykeln der Form

$$(k, k+1, k+2, \ldots k+\lambda-1) \qquad (\lambda \text{ ungerade})$$

zerfällt. Ist nun P kein Zyklus der Ordnung n, so denke man sich $P = P_1 P_2$ gesetzt, wo P_1 die k letzten Ziffern, P_2 die $n-k$ ersten Ziffern ungeändert läßt. In $\mathfrak{S}_n$ sind dann P_1 und P_2 vertauschbare Permutationen. In $\mathfrak{T}_n$ sei

$$P_2' P_1' = K \cdot P_1' P_2'.$$

Hierbei ist (vgl. D., Abschnitt II) im allgemeinen $K = E$ und nur dann $K = J$, wenn P_1 und P_2 ungerade Permutationen sind. Setzt man ferner

$$P_1^2 = Q_1, \quad P_2^2 = Q_2, \quad P^2 = P_1^2 P_2^2 = Q_1 Q_2 = Q,$$

so wird auch $Q' = Q_1' Q_2'$ (vgl. D., S. 202). Es wird nun

$$P'^2 = P_1' P_2' P_1' P_2' = K \cdot P_1'^2 P_2'^2 = K F_{P_1} F_{P_2} \cdot Q_1' Q_2'.$$

Das liefert

$$\varrho(P_1 P_2) = \pm \varrho(P_1)\varrho(P_2),$$

wobei das Minuszeichen nur dann auftritt, wenn P_1 und P_2 beide ungerade sind. Man überzeugt sich leicht, daß das Vorzeichen $\sigma(P)$ dieselbe Eigenschaft besitzt.

Hieraus folgt, daß es genügt, die Formel (5) allein für den Fall eines Zyklus P zu beweisen. Für $n = 1$ und $n = 2$ ist die Formel direkt leicht zu bestätigen. Nehmen wir daher an, sie sei für die Gruppe $\mathfrak{S}_{n-1}$ bereits bewiesen, so haben wir nur noch den Fall zu behandeln, daß P ein Zyklus der Ordnung n ist. Da P außerdem zum Komplex $\mathfrak{Z}$ gehören soll, kann n als nicht durch 4 teilbar angenommen werden.

Genau dasselbe gilt auch für die Vorzeichen $\varrho'(P)$ und $\sigma'(P)$.

2. Wir betrachten nun die Hauptcharaktere zweiter Art $\zeta(R)$ und $\zeta'(R)$ der Gruppen $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{T}_n'$. Versteht man unter ε die Zahl 0 oder 1, je nachdem $n-1$ gerade oder ungerade ist, so wird für eine Hauptpermutation P vom Typus (4)

$$\zeta(P) = \zeta'(P) = 2^{\frac{a+b-1-\varepsilon}{2}}.$$

Setzt man für $\nu = 0, 1, 2, 3$

$$S_\nu = \frac{1}{n!} \sum (-1)^b \zeta(P_\nu^2),$$

wo P_ν alle Permutationen des Komplexes $\mathfrak{Z}$ durchläuft, für die $d \equiv \nu \pmod 4$ wird, so ist

$$\frac{1}{n!} \sum{}' \sigma(P) \zeta(P^2) = S_0 - S_1 - S_2 + S_3, \tag{7}$$

$$\frac{1}{n!} \sum{}' \sigma'(P) \zeta'(P^2) = S_0 + S_1 - S_2 - S_3. \tag{8}$$

Die Summe S_ν lautet ausführlicher geschrieben

$$S_\nu = \sum \frac{(-1)^{a_3 + a_6 + a_{11} + a_{13} + \cdots} \, 2^{\frac{a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 + \cdots - 1 - \varepsilon}{2}}}{a_1!\ 1^{a_1}\ a_2!\ 2^{a_2} \cdots a_n!\ n^{a_n}},$$

wobei die Addition über alle Zerlegungen

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + n a_n = n$$

zu erstrecken ist, bei denen alle $a_{4\lambda}$ gleich 0 sind und

$$a_2 - a_3 + a_{10} - a_{14} + \cdots \equiv \nu \pmod 4$$

ist.

Die Ausdrücke $S_0 - S_2$ und $S_1 - S_3$ lassen sich berechnen. Ist nämlich τ die achte Einheitswurzel $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, so wird, wenn $\tau^\nu - \tau^{3\nu} = t_\nu$ gesetzt wird, für $|x| < 1$

$$\frac{1 - \tau^3 x}{1 - \tau x} = 1 + (1 - i) \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n x^n, \quad \log \frac{1 - \tau^3 x}{1 - \tau x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n x^n}{n},$$

also

$$1 + (1 - i) \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{t_1 x}{1} + \frac{t_2 x^2}{2} + \cdots \right)^m.$$

Das liefert für $n > 0$

$$(1 - i)\tau^n = \sum \frac{t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_n^{a_n}}{a_1!\ 1^{a_1}\ a_2!\ 2^{a_2} \cdots a_n!\ n^{a_n}} \qquad (a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n = n). \tag{9}$$

Nun ist aber

$$t_{4\lambda} = 0, \quad t_{8\lambda+1} = \sqrt{2}, \quad t_{8\lambda+3} = -\sqrt{2}, \quad t_{8\lambda+2} = 2i, \quad t_{8\lambda-2} = -2i.$$

Hieraus folgt leicht, daß (9) in der Form

$$\frac{1 - i}{2^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} \tau^n = S_0 - S_2 + i(S_1 - S_3) \tag{10}$$

geschrieben werden kann. Für $n \equiv 0, 1, \ldots, 7 \pmod 8$ erhalten wir die Werte

$$\frac{1-i}{2}, \quad 1, \quad \frac{1+i}{2}, \quad i, \quad \frac{-1+i}{2}, \quad -1, \quad \frac{-1-i}{2}, \quad -i.$$

Insbesondere werden die Ausdrücke (7) und (8) gleich 0, 1 oder -1.

3. Um nun die Formeln (5) und (6), wenn $n > 2$ eine nicht durch 4 teilbare Zahl ist, auch für die $(n-1)!$ Zykeln der Ordnung n als richtig zu erkennen,

schließe man folgendermaßen: Für einen solchen Zyklus $P = C$ wird $\zeta(C^2) = 1$. Die beiden Ausdrücke

$$\operatorname{sign}\zeta = \frac{1}{n!}\sum{}' \varrho(P)\,\zeta(P^2), \quad S_0 - S_1 - S_2 + S_3 = \frac{1}{n!}\sum{}' \sigma(P)\,\zeta(P^2)$$

sind ganze rationale Zahlen. Wegen $\varrho(P) = \pm 1$, $\sigma(P) = \pm 1$ kann ihre Differenz

$$\frac{1}{n!}\sum_C [\varrho(C) - \sigma(C)]\,\zeta(C^2) = \frac{1}{n}\,[\varrho(C) - \sigma(C)]$$

nur dann eine ganze Zahl werden, wenn $\varrho(C) = \sigma(C)$ wird.

In derselben Weise ergibt sich auch $\varrho'(C) = \sigma'(C)$.

§ 3. Der Hauptsatz über die Signaturen.

Zu jeder Zerlegung

(11) $$n = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m \qquad (\nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_m > 0)$$

gehört bei geradem $n - m$ ein einfacher (zweiseitiger) Charakter zweiter Art der Gruppe $\mathfrak{T}_n$ (bzw. $\mathfrak{T}_n'$), bei ungeradem $n - m$ ein Paar zueinander assoziierter Charaktere (vgl. D., S. 235). Da zwei assoziierte Charaktere offenbar dieselbe Signatur besitzen, entspricht jeder Zerlegung (11) eine wohlbestimmte Signatur s, bzw. s'.

Es gilt nun der Satz:

III. *Versteht man unter r den kleinsten positiven Rest von $n - m$ nach dem Modul 8, so bestimmen sich die Signaturen s und s' aus folgender Tabelle*

r	0	1	2	3	4	5	6	7
s	1	0	−1	−1	−1	0	1	1
s'	1	1	1	0	−1	−1	−1	0

Der in der Einleitung formulierte Satz I ist nur eine spezielle Folgerung aus diesem Satze. Bemerkenswert ist vor Allem, daß s und s' nur von der Anzahl der Summanden ν_μ, nicht von ihren Werten abhängen.

Ehe wir den Beweis des Satzes III in Angriff nehmen, wollen wir ihn auf eine einfachere Gestalt bringen. Man verstehe unter $\chi(R)$ bei geradem $n - m$ den zur Zerlegung (11) gehörenden einfachen Charakter zweiter Art von $\mathfrak{T}_n$, bei ungeradem $n - m$ einen der beiden zugehörigen Charaktere und definiere $\chi'(R)$ für die Gruppe $\mathfrak{T}_n'$ in analoger Weise. Setzt man ebenso wie im vorigen Paragraphen für die speziellen Charaktere $\zeta(R)$ und $\zeta'(R)$

$$S_\nu = \frac{1}{n!}\sum (-1)^b \chi(P_\nu^2) = \frac{1}{n!}\sum (-1)^b \chi'(P_\nu^2),$$

so wird nach Satz II

$$\sigma = S_0 - S_1 - S_2 + S_3, \qquad \sigma' = S_0 + S_1 - S_2 - S_3.$$

Unser Satz III besagt alsdann nur folgendes:

III'. *Ist μ gleich 0 oder 1, je nachdem $n - m$ gerade oder ungerade ist, und bedeutet τ wie früher die achte Einheitswurzel $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, so wird*

$$(12) \qquad S_0 - S_2 + i(S_1 - S_3) = \frac{\tau^{n-m}}{2^{\frac{\mu}{2}}} = \frac{\tau^n (1-i)^m}{2^{\frac{m+\mu}{2}}}.$$

Um die Summen S_n einfacher zu kennzeichnen, führen wir (wie in D., Abschnitt VIII) die der Zerlegung (11) entsprechende Charakteristik Φ ein. Setzt man, wenn P eine Hauptpermutation der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ vom Typus $(a_1, 0, a_3, 0, \ldots)$ ist,

$$\chi(P) = \chi'(P) = \chi_{a_1, a_3, a_5, \ldots}$$

und bedeuten $x_1, x_3, x_5, \ldots$ unabhängige Variable, so kann Φ in der Form

$$\Phi = \sum' \frac{2^{\frac{a_1 + a_3 + \cdots}{2}}}{a_1!\, a_3! \ldots} \chi_{a_1, a_3, \ldots} x_1^{a_1} x_3^{a_3} \cdots \qquad (a_1 + 3a_3 + \cdots = n)$$

geschrieben werden [1]).

Ist nun allgemein

$$(13) \qquad u = \sum' \frac{c_{a_1, a_3, \ldots}}{a_1!\, a_3! \ldots} x_1^{a_1} x_3^{a_3} \cdots \qquad (a_1 + 3a_3 + \cdots = n)$$

ein Polynom in den Variabeln $x_1, x_3, \ldots$, so führe man neue Variable $x_2, x_6, x_{10}, \ldots$ ein und verstehe unter u' das Polynom

$$u' = \sum' \frac{c_{a_1 + 2a_2, a_3 + 2a_6, \ldots}}{a_1!\, a_2!\, a_3!\, a_5! \ldots} x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} x_5^{a_5} \cdots.$$

Die Summe erstreckt über alle Indizes $a_\nu \geqq 0$, die der Bedingung

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu = n \qquad (a_4 = a_8 = \cdots = 0)$$

genügen [2]). Spezialisiert man die x_ν, indem man

$$(14) \qquad x_\nu = \frac{\tau^\nu}{1 - i^\nu} \cdot \frac{1}{\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 5\ 6, \ldots)$$

oder deutlicher

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 2x_2 = \frac{i}{2}, \quad 3x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 5x_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 6x_6 = -\frac{i}{2}$$

$$7x_7 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots$$

setzt, so gehe u' in u über. Beachtet man, daß in der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ die Anzahl der Permutationen vom Typus $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ gleich

$$\frac{n!}{a_1!\, 1^{a_1} a_2!\, 2^{a_2} \cdots a_n!\, n^{a_n}}$$

[1]) In der mit D. zitierten Arbeit schrieb ich $\frac{s_\nu}{\nu}$ für x_ν.

[2]) Den Übergang von u zu u' kann man als Polarisierungsprozeß deuten. Es ist nämlich

$$u' = \sum \frac{x_2^{\beta_2} x_6^{\beta_6} \cdots}{\beta_2!\, \beta_6! \cdots} \frac{\partial^{2\beta_2 + 2\beta_6 + \cdots} u}{\partial x_1^{2\beta_2}\, \partial x_3^{2\beta_6} \cdots} \qquad (2\beta_2 + 6\beta_6 + \cdots \leq n).$$

ist, so erkennt man leicht, daß der Ausdruck $S_0 - S_2 + i(S_1 - S_3)$ nichts anderes ist als $\overline{\Phi}$.

Um die Charakteristik Φ zu berechnen, hat man folgendermaßen zu verfahren: Man setze $q_0 = 1$,

$$q_n = \sum \frac{2^{a_1 + a_3 + \cdots}}{a_1!\, a_3! \cdots} x_1^{a_1} x_3^{a_3} \cdots \qquad (a_1 + 3a_3 + \cdots = n)$$

und führe die für $|x_\nu| \leqq \frac{1}{\nu}$, $|z| < 1$ konvergente Potenzreihe

$$f(z) = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots$$

ein [1]). Dann wird $f(z)f(-z) = 1$ (vgl. D., S. 224). Hieraus folgt, daß der alternierende Ausdruck

$$f(z_1, z_2) = (f(z_1) f(z_2) - 1) \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$$

sich für $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ in der Form

$$f(z_1, z_2) = \sum_{\alpha, \beta}{}'_0{}^{\infty} Q_{\alpha\beta} z_1^\alpha z_2^\beta$$

entwickeln läßt. Hierbei wird $Q_{\alpha\beta} = -Q_{\beta\alpha}$ und $Q_{\nu 0} = q_\nu$ für $\nu > 0$.

Ist nun k eine gerade Zahl und bildet man für k Variable $z_1, z_2, \ldots, z_k (|z_\varkappa| < 1)$ den *Pfaff*schen Ausdruck $f(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ des alternierenden Systems $f(z_\varkappa, z_\lambda)$, so sei

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_k) = \sum_{a_1, a_2, \ldots, a_k}{}'_0{}^{\infty} Q_{a_1 a_2, \ldots, a_k} z_1^{a_1} z_2^{a_2} \cdots z_k^{a_k}.$$

Es wird dann (vgl. D., Abschnitt IX) für ein gerades m

$$\Phi = \frac{1}{2^{\frac{m+\mu}{2}}} Q_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$$

und für ein ungerades m

$$\Phi = \frac{1}{2^{\frac{m+\mu}{2}}} Q_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m, 0}\ ^{2}).$$

Für eine unendliche Reihe

$$u = u_1 + u_2 + \cdots,$$

deren Glieder Polynome der Form (13) sind, setze man

$$u' = u_1' + u_2' + \cdots,$$

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \cdots.$$

---

[1]) Hier treten also unendlich viele Veränderliche $x_1, x_3, x_5, \ldots$ auf. Ebenso hat man im folgenden auch unendlich viele Veränderliche $x_2, x_6, x_{10}, \ldots$ zu benutzen.

[2]) In D. sind die Ausdrücke $Q_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}$ etwas anders eingeführt worden. Die hier benutzte Definition ist die einfachere.

Hierbei wird angenommen, daß die Reihen etwa für $|x_\nu| \leqq \frac{1}{\nu}$ absolut konvergent sind [1]).

Der Satz III′ besagt nun, wie man sich leicht überlegt, daß

$$\overline{f(z_1, z_2, \ldots, z_k)} = \sum_{a_1, a_2, \ldots, a_k}^{0, \infty} \overline{Q}_{a_1, a_2, \ldots, a_k} z_1^{a_1} z_2^{a_2} \cdots z_k^{a_k}$$

in der Form

$$(15) \qquad (1-i)^{k-1} \Big\{ \sum_0^\infty [a_1, a_2, \ldots, a_k]\, u_1^{a_1} u_2^{a_2} \cdots a_k^{a_k} - i \cdot \sum_1^\infty [a_1, a_2, \ldots, a_k]\, u_1^{a_1} u_2^{a_2} \cdots u_k^{a_k} \Big\}$$

geschrieben werden kann. Hierbei ist $u_\varkappa = \tau z_\varkappa$ zu setzen, ferner hat man unter dem Zeichen $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ den Wert 0 zu verstehen, wenn zwei Indizes übereinstimmen und bei k voneinander verschiedenen Indizes den Wert 1 oder -1, je nachdem eine gerade oder eine ungerade Permutation erforderlich ist, um die k Indizes nach abnehmender Größe zu ordnen. Für (15) kann man offenbar auch

$$(1-i)^{k-1}(1 - i\, u_1 u_2 \cdots u_k) \sum_1^\infty [a_1, a_2, \ldots, a_k]\, u_1^{a_1} u_2^{a_2} \cdots u_k^{a_k}$$

schreiben. Die hier auftretende Summe ist aber, wie man leicht erkennt, gleich

$$\sum_\lambda \pm \Big(\sum_{a_1 > a_2 > \cdots > a_k}^0 u_{\lambda_1}^{a_1} u_{\lambda_2}^{a_2} \cdots u_{\lambda_k}^{a_k} \Big) = \sum_\lambda \pm \Big(\sum_{a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_k}^0 u_{\lambda_1}^{a_1} u_{\lambda_2}^{a_2} \cdots u_{\lambda_k}^{a_k} \Big),$$

wobei die erste Summation über alle $k!$ Permutationen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ der Indizes $1, 2, \ldots, k$ zu erstrecken und für eine gerade Permutation das Pluszeichen, für eine ungerade das Minuszeichen zu wählen ist.

Es ist aber für $|v_k| < 1$

$$\sum_{a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_k}^0 v_1^{a_1} v_2^{a_2} \cdots v_k^{a_k} = \frac{1}{(1-v_1)(1-v_1 v_2) \cdots (1 - v_1 v_2 \cdots v_k)}.$$

Wir haben also zu beweisen:

III″. *Setzt man* $u_\varkappa = \tau z_\varkappa$, *so wird*

$$\overline{f(z_1, z_2, \ldots, z_k)} = (1-i)^{k-1}(1 - i\, u_1 u_2 \cdots u_k) \sum_\lambda \pm \frac{1}{(1-u_{\lambda_1})(1 - u_{\lambda_1} u_{\lambda_2}) \cdots (1 - u_{\lambda_1} u_{\lambda_2} \cdots u_{\lambda_k})}.$$

§ 4. Einige Hilfssätze.

A. *Sind u und v zwei Polynome der Form* (13) *oder auch zwei unendliche Reihen, deren Glieder solche Polynome sind, so wird*

$$(16) \qquad (u\,v)' = \sum_{\lambda_1, \lambda_3, \ldots}^0 \frac{(2x_2)^{\lambda_1} (2x_6)^{\lambda_3} \cdots}{\lambda_1!\ \lambda_3! \cdots} \Big(\frac{\partial^{\lambda_1 + \lambda_3 + \cdots} u}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_3^{\lambda_3} \cdots} \Big)' \Big(\frac{\partial^{\lambda_1 + \lambda_3 + \cdots} v}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_3^{\lambda_3} \cdots} \Big)'.$$

Hierbei soll jedes Glied der Summe nur endlich viele Indizes $\lambda_1, \lambda_3, \ldots$ enthalten [2]).

[1]) Hierdurch ist insbesondere das Zeichen u' für beliebige Polynome in $x_1, x_3, x_5, \ldots$ definiert.

[2]) Ist eine der Funktionen u und v ein Polynom, so bricht die Reihe ab. Im anderen Falle hat man etwa anzunehmen, daß die hier vorkommenden Reihen für $|x_\nu| \leqq \frac{1}{\nu}$ absolut konvergent sind.

Der Beweis kann folgendermaßen erbracht werden. Da der Übergang von einer Funktion w zu w' offenbar eine distributive Operation ist, genügt es, die Formel allein für den Fall zu beweisen, daß u und v Potenzprodukte in $x_1, x_3, \ldots$ sind. Für Potenzprodukte ist die Formel aber gewiß richtig, wenn sie für zwei beliebige Exponentialfunktionen der Form

$$w = e^{\xi_1 x_1 + \xi_3 x_3 + \cdots + \xi_{2m-1} x_{2m-1}}$$

gilt. In diesem Fall ist aber die Richtigkeit der Formel (16) leicht zu bestätigen, indem man die ebenso leicht zu beweisende Formel

$$w' = e^{\xi_1 x_1 + \xi_1^2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_3^2 x_6 + \cdots + \xi_{2m-1} x_{2m-1} + \xi_{2m-1}^2 x_{4m-2}}$$

benutzt [1]).

B. *In den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen wird*

$$\overline{f(z)} = \frac{1 - iu}{1 - u} \qquad (u = \tau z)\,, \tag{17}$$

$$\overline{f(z_1) f(z_2) \cdots f(z_r)} = \prod_{\varkappa=1}^{r} \frac{1 - i u_\varkappa}{1 - u_\varkappa} \cdot \prod_{\varkappa<\lambda}{}' \frac{1 + u_\varkappa u_\lambda}{1 - u_\varkappa u_\lambda} \qquad (u_\varkappa = \tau z_\varkappa). \tag{18}$$

Um die Formel (17) zu beweisen, hat man nur zu beachten, daß die Gleichung (12) für den Fall $\chi(R) = \zeta(R)$, $\chi'(R) = \zeta'(R)$ schon in § 2 bewiesen worden ist (vgl. Formel (10)). Da die zugehörige Charakteristik nichts anderes als der Ausdruck q_n ist, wird $\overline{q_n} = (1 - i)\tau^n$, und das liefert

$$\overline{f(z)} = 1 + (1 - i) \sum_{n=1}^{\infty} (\tau z)^n = \frac{1 - iu}{1 - u}.$$

Beim Beweis der Formel (18) hat man zu benutzen, daß

$$\frac{\partial q_n}{\partial x_1} = 2 q_{n-1}, \qquad \frac{\partial q_n}{\partial x_3} = 2 q_{n-3}, \ldots,$$

also

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x_1} = 2 z f(z), \quad \frac{\partial f(z)}{\partial x_3} = 2 z^3 f(z), \ldots$$

wird. Ferner hat man davon Gebrauch zu machen, daß, wenn

$$\frac{(1 + \xi_1 t)(1 + \xi_2 t) \cdots (1 + \xi_m t)}{(1 - \xi_1 t)(1 - \xi_2 t) \cdots (1 - \xi_m t)} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n t^n \tag{19}$$

und

$$\frac{1}{\nu} (\xi^\nu + \xi^\nu + \cdots + \xi_m^\nu) = p_\nu$$

gesetzt wird,

$$Q_n = \sum' \frac{(2 p_1)^{\lambda_1} (2 p_3)^{\lambda_3} \cdots}{\lambda_1!\ \lambda_3! \cdots} \qquad (\lambda_1 + 3\lambda_3 + \cdots = n) \tag{20}$$

ist (vgl. D., S. 206).

[1]) Beim Beweis dieser Formel macht man am besten von der in der Fußnote 2) auf S. 69 gemachten Bemerkung Gebrauch.

Setzt man nun in (16)

$$u = f(z_1), \qquad v = f(z_2),$$

so erhält man

$$(f(z_1)f(z_2))' = (f(z_1))'(f(z_2))' \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \cdots}^{0, \infty} \frac{(2x_2)^{\lambda_1}(2x_3)^{\lambda_2}\cdots}{\lambda_1!\ \lambda_3!\cdots} 4^{\lambda_1+\lambda_3+\cdots}(z_1 z_2)^{\lambda_1+3\lambda_3+\cdots}.$$

Für die speziellen Werte (14) ergibt sich wegen (19) und (20)

$$\overline{f(z_1)f(z_2)} = \overline{f(z_1)}\,\overline{f(z_2)} \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \cdots}^{0, \infty} \frac{(\tau^2 z_1 z_2)^{\lambda_1+3\lambda_3+\cdots}}{\lambda_1!\ \lambda_3!\cdots}\left(\frac{2}{1}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{2}{3}\right)^{\lambda_3}\cdots$$

$$= \overline{f(z_1)}\,\overline{f(z_2)}\,\frac{1+u_1u_2}{1-u_1u_2}.$$

Das liefert in Verbindung mit (17) die Formel (18) für $r = 2$. In ähnlicher Weise ergibt sich die Formel für $r > 2$, indem man sie für $r-1$ Variable z_ϱ als schon bewiesen annimmt und in (16)

$$u = f(z_1)f(z_2)\cdots f(z_{r-1}), \qquad v = f(z_r)$$

setzt.

C. *Für k Variable $u_1, u_2, \ldots, u_k$ setze man*

$$F_\varkappa = (1-u_\varkappa)(1-u_\varkappa u_1)\cdots(1-u_\varkappa u_{\varkappa-1})(1-u_\varkappa u_{\varkappa+1})\cdots(1-u_\varkappa u_k)$$

und stelle $F_\varkappa$, was jedenfalls möglich ist, in der Form

$$F_\varkappa = G_0 + G_1 u_\varkappa + G_2 u_\varkappa^2 + \cdots + G_{k-1}u_\varkappa^{k-1} \tag{21}$$

dar, wo $G_0, G_1, \ldots, G_{k-1}$ ganze rationale symmetrische Funktionen von $u_1, u_2, \ldots, u_k$ sind[1]*). Dann wird insbesondere*

$$G_{k-1} = (-1)^{k-1}(1-u_1u_2\cdots u_k). \tag{22}$$

Es wird nämlich, wenn $c_1, c_2, \ldots, c_k$ die elementar-symmetrischen Funktionen von $u_1, u_2, \ldots, u_k$ bedeuten,

$$(1+u_\varkappa)F_\varkappa = \prod_{\lambda=1}^{k}(1-u_\varkappa u_\lambda) = 1 - c_1u_\varkappa + c_2u_\varkappa^2 - \cdots + (-1)^k c_k u_\varkappa^k.$$

Ersetzt man hier $F_\varkappa$ durch den Ausdruck (21), führt links die Multiplikation aus und schreibt für $u_\varkappa^k$ auf beiden Seiten

$$c_1u_\varkappa^{k-1} - c_2u_\varkappa^{k-1} + \cdots - (-1)^k c_k,$$

so entsteht eine Gleichung, die in bezug auf $u_\varkappa$ vom Grade $k-1$ ist und die für $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$ gilt. Daher ist sie eine Identität in $u_\varkappa$. Setzt man nun $u_\varkappa = -1$, so erhält man links

$$(-1)^{k-1}G_{k-1}(1 + c_1 + c_2 + \cdots + c_k)$$

und rechts

$$1 + c_1 + \cdots + c_{k-1} - c_k(c_1 + c_2 + \cdots + c_k)$$
$$= (1 + c_1 + c_2 + \cdots + c_k)(1 - c_k).$$

Das liefert wegen $c_k = u_1u_2\cdots u_k$ die zu beweisende Formel (22).

[1]) Vgl. z. B. *H. Weber*, Lehrbuch der Algebra, zweite Auflage (1898), Bd. 1, § 48.

D. *Setzt man*

$$\Delta(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \prod_{\varkappa<\lambda}^{k}{}_1 (u_\varkappa - u_\lambda),$$

so wird

$$(23) \qquad A = \sum_{\lambda} \pm \frac{1}{(1-u_{\lambda_1})(1-u_{\lambda_1}u_{\lambda_2})\cdots(1-u_{\lambda_1}u_{\lambda_2}\cdots u_{\lambda_k})} = \frac{\Delta(u_1, u_2, \ldots, u_k)}{\prod_{\varkappa=1}^{k}(1-u_\varkappa)\cdot\prod_{\varkappa<\lambda}(1-u_\varkappa u_\lambda)}.$$

Für $k = 2$ ist die Formel leicht zu bestätigen. Man nehme sie für $k-1$ Variable als schon bewiesen an. Faßt man in der Summe A die $(k-1)!$ Glieder zusammen, bei denen λ_k einen festen Wert hat, so entstehen k Teilsummen, die sich auf Grund der über $k-1$ Variable gemachten Voraussetzung in geschlossener Form darstellen lassen. In den vorhin eingeführten Bezeichnungen wird

$$A\cdot\prod_{\varkappa=1}^{k}(1-u)\cdot\prod_{\varkappa<\lambda}(1-u_\varkappa u_\lambda)\cdot(1-u_1u_2\cdots u_k)$$

$$= (-1)^{k-1}\sum_{\varkappa=1}^{k}(-1)^{k-1}F_\varkappa\Delta(u_1, \ldots, u_{\varkappa-1}, u_{\varkappa+1}, \ldots, u_k).$$

Die rechts stehende Summe ist aber nichts anderes als die Determinante

$$\begin{vmatrix} F_1, & F_2, & \ldots, & F_k \\ u_1^{k-2}, & u_2^{k-2}, & \ldots, & u_k^{k-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & 1, & \ldots, & 1 \end{vmatrix}.$$

Auf Grund des Hilfssatzes C wird das gleich

$$(-1)^{k-1}G_{k-1}\begin{vmatrix} u_1^{k-1}, & u_2^{k-1}, & \ldots, & u_k^{k-1} \\ u_1^{k-2}, & u_2^{k-2}, & \ldots, & u_k^{k-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & 1, & \ldots, & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{k-1}G_{k-1}\Delta(u_1, u_2, \ldots, u_k).$$

In Verbindung mit (22) ergibt sich für A die Darstellung (23).

§ 5. Über einige spezielle *Pfaff*sche Ausdrücke.

Bilden für ein gerades k die k^2 Größen $a_{\varkappa\lambda}$ ein alternierendes System, so bezeichne ich den zugehörigen *Pfaff*schen Ausdruck entweder wie üblich mit $(1, 2, \ldots, k)$ oder auch mit $Pf[a_{\varkappa\lambda}]$. Zur Berechnung des Ausdrucks dient neben der Gleichung $(1, 2) = a_{12}$ die Rekursionsformel

$$(24) \qquad (1, 2, \ldots, k) = a_{12}\,(3, 4, \ldots, k) - a_{13}\,(2, 4, \ldots k) + \cdots.$$

Man kann den *Pfaff*schen Ausdruck auch als die Summe der $1\cdot3\cdot5\cdots(k-1)$ wesentlich verschiedenen Produkte deuten, die aus $a_{12}a_{34}\cdots a_{k-1,k}$ bei Anwendung aller geraden Permutationen der Indizes $1, 2, \ldots, k$ hervorgehen. Dafür schreibe ich kurz

$$Pf[a_{12}] = \sum a_{12}\, a_{34} \cdots a_{k-1,\,k}\,. \tag{25}$$

Es sei auch noch die triviale Formel

$$Pf[a_1 a_2 a_{12}] = a_1 a_2 \cdots a_k\, Pf[a_{12}] \tag{26}$$

erwähnt.

Im folgenden werden wir eine Reihe von speziellen *Pfaff*schen Ausdrucken zu benutzen haben.

E. *Sind $u_1, u_2, \ldots, u_k$ unabhängige Variable, so wird*

$$Pf\left[\frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}\right] = \prod_{\varkappa<\lambda} \frac{u_\varkappa - u_\lambda}{u_\varkappa + u_\lambda}. \tag{27}$$

$$Pf\left[\frac{u_1 - u_2}{1 - u_1 u_2}\right] = \prod_{\varkappa<\lambda} \frac{u_\varkappa - u_\lambda}{1 - u_\varkappa u_\lambda}, \tag{28}$$

$$Pf\left[\frac{1 + u_1 u_2}{1 - u_1 u_2} \cdot \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}\right] = \prod_{\varkappa<\lambda} \frac{1 + u_\varkappa u_\lambda}{1 - u_\varkappa u_\lambda} \cdot \frac{u_\varkappa - u_\lambda}{u_\varkappa + u_\lambda}. \tag{29}$$

Den Beweis der Gleichung (27) habe ich in D., S. 225—226 angegeben, die beiden anderen Gleichungen ergeben sich auf ganz ähnlichem Wege.

Etwas weniger einfach ist der Beweis des Hilfssatzes:

F. *Sind $x, u_1, u_2, \ldots, u_k$ unabhängige Variable, so wird*

$$Pf\left[\frac{1 + x\,u_1 u_2}{1 - u_1 u_2}(u_1 - u_2)\right] = (1 + x)^{\frac{k-2}{2}} (1 + x u_1 u_2 \cdots u_k) \prod_{\varkappa<\lambda} \frac{u_\varkappa - u_\lambda}{1 - u_\varkappa u_\lambda}. \tag{30}$$

Bezeichnet man den links stehenden Ausdruck, der in bezug auf x ein Polynom vom Grade $\frac{k}{2}$ ist, mit $F(x)$, so ist nur zu zeigen, daß $F(x)$ die Form

$$F(x) = (1 + x)^{\frac{k-2}{2}} (A + B x)$$

hat. Denn dann wird A das konstante Glied, B der höchste Koeffizient von $F(x)$, also wegen (26) und (28)

$$A = Pf\left[\frac{u_1 - u_2}{1 - u_1 u_2}\right] = P$$

$$B = Pf\left[\frac{u_1 u_2 (u_1 - u_2)}{1 - u_1 u_2}\right] = u_1 u_2 \cdots u_k \cdot P\,.$$

Hier ist zur Abkürzung

$$\prod_{\varkappa<\lambda} \frac{u_\varkappa - u_\lambda}{1 - u_\varkappa u_\lambda} = P \tag{31}$$

gesetzt worden.

Daß nun $F(x)$ durch $(1 + x)^{\frac{k-4}{2}}$ teilbar ist, folgt unmittelbar aus der Rekursionsformel (24), wenn wir die Gleichung (30) für $k - 2$ Variable $u_\varkappa$ als schon bewiesen annehmen. Setzt man

$$F(x) = (1 + x)^{\frac{k-4}{2}} G(x),$$

so ist nur noch zu zeigen, daß $G(-1) = 0$ ist. Dies ergibt sich aber folgendermaßen: Bezeichnet man das Produkt (31) deutlicher mit $P_{12\ldots k}$, so liefert die Rekursionsformel (24) in leicht verständlichen Bezeichnungen

$$G(-1) = (u_1 - u_2)(1 - u_3 u_4 \cdots u_k) P_{34\ldots k} - (u_1 - u_3)(1 - u_2 u_4 \cdots u_k) P_{24\ldots k} + \cdots$$
$$= (u_1 + u_2 u_3 \cdots u_k) R - S - u_1 u_2 \cdots u_k T,$$

wobei

$$R = P_{34\ldots k} - P_{24\ldots k} + \cdots,$$
$$S = u_2 P_{34\ldots k} - u_3 P_{24\ldots k} + \cdots,$$
$$T = \frac{1}{u_2} P_{34\ldots k} - \frac{1}{u_3} P_{24\ldots k} + \cdots$$

wird.

Nun folgt aber aus (28)

$$P_{12\ldots k} = \frac{u_1 - u_2}{1 - u_1 u_2} P_{34\ldots k} - \frac{u_1 - u_3}{1 - u_1 u_3} P_{24\ldots k} + \cdots.$$

Hieraus ergibt sich für $u_1 = 1$

$$R = P_{23\ldots k},$$

für $u_1 = 0$

$$S = u_2 u_3 \cdots u_k \cdot P_{23\ldots k}$$

und für $u_1 \to \infty$

$$T = \frac{1}{u_2 u_3 \cdots u_k} \cdot P_{23\ldots k}.$$

Dies liefert aber in der Tat $G(-1) = 0$.

§ 6. Beweis des Hauptsatzes.

Um unseren Hauptsatz III oder, was dasselbe ist, den Satz III′ zu beweisen, haben wir auf Grund des Hilfssatzes D nur zu zeigen, daß

$$(32) \qquad H = \overline{f(z_1, z_2, \ldots, z_k)} = (1 - i)^{k-1} \frac{1 - i u_1 u_2 \cdots u_k}{\prod_\varkappa (1 - u_k)} \cdot \prod_{\varkappa<\lambda} \frac{u_\varkappa - u_\lambda}{1 - u_\varkappa u_\lambda}$$

wird.

Das ergibt sich folgendermaßen: Setzt man zur Abkürzung

$$\prod_{\varkappa=1}^{k} \frac{1 - i u_\varkappa}{1 - u_\varkappa} \cdot \prod_{\varkappa<\lambda}^{k}{}_1 \frac{1 + u_\varkappa u_\lambda}{1 - u_\varkappa u_\lambda} = F_{12\ldots k},$$

so besagt der Hilfssatz B, daß für jedes r

$$(33) \qquad \overline{f(z_1) f(z_2) \cdots f(z_2)} = F_{12\ldots r}$$

wird. Den *Pfaff*schen Ausdruck des alternierenden Systems

$$f(z_\varkappa, z_\lambda) = (f(z_\varkappa) f(z_\lambda) - 1) \frac{z_\varkappa - z_\lambda}{z_\varkappa + z_\lambda} = (f(z_\varkappa) f(z_\lambda) - 1) \frac{u_\varkappa - u_\lambda}{u_\varkappa + u_\lambda}$$

schreiben wir (vgl. Formel (25)) als Summe von $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (k-1)$ Gliedern

$$f(z_1, \ldots, z_k) = \sum f(z_1, z_2) f(z_3, z_4) \cdots f(z_{k-1}, z_k).$$

In den hier auftretenden Produkten

$$(f(z_1) f(z_2) - 1)(f(z_3) f(z_4) - 1) \cdots (f(z_{k-1}) f(z_k) - 1)$$

führen wir die Multiplikation aus. Dann ergibt sich wegen (33) in leicht verständlichen Bezeichnungen

$$(34) \qquad H = \sum (F_{12\ldots k} - F_{12\ldots k-3,\,k-2} - \cdots + 1) \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \cdots \frac{u_{k-1} - u_k}{u_{k-1} + u_k},$$

wobei der Ausdruck in der Klammer $2^{\frac{k}{2}}$ Glieder enthält. Es kann also

$$H = H_1 + H_2 + \cdots + H_{2^{\frac{k}{2}}}$$

gesetzt werden, wo

$$H_1 = \sum F_{12\ldots k} \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \cdot \frac{u_3 - u_4}{u_3 + u_4} \cdots \frac{u_{k-1} - u_k}{u_{k-1} + u_k},$$

$$H_2 = -\sum F_{12\ldots k-3,\,k-2} \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \cdot \frac{u_3 - u_4}{u_3 + u_4} \cdots \frac{u_{k-1} - u_k}{u_{k-1} + u_k} \quad \text{usw.}$$

wird.

Nun folgt aber aus (26) und (29)

$$(35) \qquad Pf\left[F_{12} \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}\right] = F_{12\ldots k} \cdot Pf\left[\frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}\right].$$

Daher kann H_1 auch in der Form

$$H_1 = \sum F_{12} F_{34} \cdots F_{k-1,\,k-2} \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \cdot \frac{u_3 - u_4}{u_3 + u_4} \cdots \frac{u_{k-1} - u_k}{u_{k-1} - u_k}$$

geschrieben werden. Faßt man ferner in H_2 diejenigen $1 \cdot 3 \cdots (k-3)$ Glieder zusammen, in denen der Faktor $\frac{u_\nu - u_k}{u_\nu + u_k}$ auftritt, so erhält man $k-1$ Teilsummen, die sich wieder mit Hilfe der Formel (35) so umformen lassen, daß

$$H_2 = \sum F_{12} \cdots F_{k-3,\,k-2} \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \cdot \frac{u_3 - u_2}{u_3 + u_4} \cdots \frac{u_{k-1} - u_k}{u_{k-1} + u_k}$$

wird. Fährt man in dieser Weise fort, so erkennt man, daß in (34) jeder hier auftretende Ausdruck $F_{\varkappa\lambda\mu\nu\ldots}$ durch $F_{\varkappa\lambda} F_{\mu\nu} \cdots$ ersetzt werden darf.

Das liefert aber

$$H = Pf\left[(F_{12} - 1) \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}\right].$$

Hierin ist

$$F_{12} - 1 = \frac{1 - i u_1}{1 - u_1} \cdot \frac{1 - i u_2}{1 - u_2} \cdot \frac{1 + u_1 u_2}{1 - u_1 u_2} = \frac{(1 - i)(u_1 + u_2)(1 - i u_1 u_2)}{(1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_1 u_2)}.$$

Daher wird

$$H = \frac{(1 - i)^{\frac{k}{2}}}{\prod_\varkappa (1 - u_\varkappa)} Pf\left[\frac{1 - i u_1 u_2}{1 - u_1 u_2} (u_1 - u_2)\right].$$

Wendet man nun den Hilfssatz F (für $x = -i$) an, so ergibt sich die zu beweisende Gleichung (32).

§ 7. Die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_n$.

IV. *Eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{A}_n$ durch lineare homogene Substitutionen (Matrizen) läßt sich dann und nur dann reell wählen, wenn der Charakter der Darstellung reell ist.*

Der Beweis ist leicht zu erbringen. Die irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{A}_n$ werden mit Hilfe der von $\mathfrak{S}_n$ folgendermaßen gewonnen. Ist $\mathfrak{D}$ eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{S}_n$ mit dem Charakter $\chi(R)$, bei der der Permutation R die Matrix (R) entspricht, so kann $\chi(R)$ von dem assoziierten Charakter $\chi_1(R)$ verschieden sein oder mit ihm übereinstimmen. Im ersten Fall bilden, wenn G die geraden, U die ungeraden Permutationen von $\mathfrak{S}_n$ durchläuft, die Matrizen (G) eine irreduzible Darstellung $\mathfrak{D}'$ von $\mathfrak{A}_n$ mit dem reellen Charakter $\chi(G)$ [1]). Da wir die Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{S}_n$ von vorneherein als reell voraussetzen dürfen, ist auch die Darstellung $\mathfrak{D}'$ von $\mathfrak{A}_n$ reell.

Ist aber $\chi(R) = \chi_1(R)$, so zerfällt die Darstellung von $\mathfrak{A}_n$ durch die Matrizen (G) in zwei irreduzible Darstellungen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ mit den Charakteren $\psi_1(G)$ und $\psi_2(G)$ [1]). Um diese Zerfällung zu erhalten, bestimme man, was hier möglich ist, eine reelle Matrix C, so daß

$$C^{-1}(G)C = (G), \qquad C^{-1}(U)C = -(U)$$

wird. Da C^2 mit allen (R) vertauschbar ist, wird $C^2 = aE$. Bestimmt man nun eine Ähnlichkeitstransformation T, die C in eine Diagonalmatrix mit den Elementen $\pm\sqrt{a}$ in der Hauptdiagonale überführt, so zerfällt $T^{-1}(G)T$ in der gewünschten Weise. Daher wird jedenfalls die Spur $\varphi(G)$ von $C(G)$ nichts anderes als $\sqrt{a}\,(\psi_1(G) - \psi_2(G))$. Da die Zahlen $\varphi(G)$ jedenfalls reell sind, sind die Charaktere $\psi_1(G)$ und $\psi_2(G)$ reell für $a > 0$ und (konjugiert) imaginär für $a < 0$. Ist aber $a > 0$, so läßt sich die Ähnlichkeitstransformation T reell wählen. Dies zeigt, daß, wenn die Charaktere $\psi_1(G)$ und $\psi_2(G)$ reell sind, auch die zugehörigen Darstellungen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ reell gewählt werden können.

Auch für die Darstellungen von $\mathfrak{A}_n$ als eigentliche Kollineationsgruppen läßt sich die Realitätsfrage einfach erledigen. Sieht man von den beiden Ausnahmefällen $n = 6$ und $n = 7$ ab, so erhält man (für $n > 3$) alle mit $\mathfrak{A}_n$ isomorphen irreduziblen Kollineationsgruppen, indem man für jede Zerlegung

$$n = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m \qquad (\nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_m > 0) \tag{36}$$

bei ungeradem $n - m$ eine solche Gruppe $\mathfrak{L}$, bei geradem $n - m$ zwei (algebraisch konjugierte) Gruppen $\mathfrak{L}'$ und $\mathfrak{L}''$ bestimmt (vgl. D., S. 236).

Es gilt der Satz:

V. *Nur in den Fällen*

$$n - m \equiv 0,\ 1,\ 7 \pmod 8$$

läßt sich bei den Kollineationsgruppen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ und $\mathfrak{L}''$ Realität erzielen.

[1]) Vgl. die in der Einleitung zitierten Arbeiten von *Frobenius*.

Um diesen Satz zu beweisen, bestimmen wir die Signaturen der einfachen Charaktere (zweiter Art) der Darstellungsgruppe $\mathfrak{B}_n$ von $\mathfrak{A}_n$. Der Zerlegung (36) entspricht bei ungeradem $n - m$ ein solcher Charakter $\psi(R)$, bei geradem $n - m$ ein Paar von Charakteren $\psi_1(R)$ und $\psi_2(R)$. Im zweiten Fall besitzen $\psi_1(R)$ und $\psi_2(R)$ als algebraisch konjugierte Charaktere dieselbe Signatur. Für jede Zerlegung (36) haben wir also nur eine Signatur s'' zu berechnen. Hierzu dient die Tabelle

r	0	1	2	3	4	5	6	7	$(n - m \equiv r \pmod 8)$
s''	1	1	0	−1	−1	−1	0	1	

Sind nämlich (wie in § 3) $\chi(R)$ und $\chi'(R)$ die zur Zerlegung (36) gehörenden einfachen Charaktere von $\mathfrak{T}_n$ und $\mathfrak{T}'_n$, so schreibe man ihre Signaturen s und s' in der einfachsten Form

$$s = \frac{1}{2\,n!}\sum \chi(R^2), \quad s' = \frac{1}{2\,n!}\sum \chi'(R_1^2),$$

wo R alle Elemente von $\mathfrak{T}_n$ und R_1 alle Elemente von $\mathfrak{T}'_n$ durchläuft. Nun erhält man aus einer zu $\chi(R)$ gehörenden Darstellung von $\mathfrak{T}_n$ durch Matrizen (R) die zugehörige Darstellung von $\mathfrak{T}'_n$, indem man (R) ungeändert läßt oder mit i multipliziert, je nachdem R in der Untergruppe $\mathfrak{B}_n$ von $\mathfrak{T}_n$ enthalten ist oder nicht (vgl. D., Abschnitt I). Hieraus folgt unmittelbar

$$s + s' = \frac{1}{n!}\sum \chi(S^2),$$

wo S alle Elemente von $\mathfrak{B}_n$ durchläuft. Für ein ungerades $n - m$ wird $\chi(S) = \psi(S)$, für ein gerades $n - m$ aber $\chi(S) = \psi_1(S) + \psi_2(S)$. Daher wird im ersten Fall $s + s' = s''$, im zweiten Fall $s + s' = 2s''$.

Die Tabelle für die Zahlen s'' ergibt sich nun aus der auf S. 68 angegebenen Tabelle für die Zahlen s und s'. Zugleich erkennen wir die Richtigkeit des Satzes V.

Die in den Ausnahmefällen $n = 6$ und $n = 7$ noch hinzukommenden irreduzibeln Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{A}_n$ durch Kollineationen lassen sich jedenfalls nicht reell wählen. Dies geht schon aus der Rolle hervor, die bei diesen Darstellungen die Zahl $\varrho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ spielt (vgl. D., Abschnitt IX).

Zur Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus.

Von *Leon Lichtenstein* in Leipzig.

In der vorliegenden Arbeit wird die auf *Fourier* zurückgehende Integrationsmethode auf die Auflösung einiger Randwertaufgaben in der Theorie *nichtlinearer* partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus angewandt.

§ 1.

Es ist diejenige nebst ihren partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

in dem Bereiche $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq t \leqq T$ *stetige Lösung der Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u^2 \tag{1}$$

zu bestimmen, die den Randbedingungen

$$u = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{sowie} \quad x = \pi, \tag{2}$$

$$u = f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f_2(x) \quad \text{für} \quad t = 0 \quad \text{und} \quad 0 \leqq x \leqq \pi \tag{3}$$

genügt, unter $f_1(x)$ *und* $f_2(x)$ *Funktionen verstanden, die sich in der Form*

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n \sin n x, \qquad f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c''_n \sin n x \tag{4}$$

mit konvergenten $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |c'_n|$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} n c''_n$ *darstellen lassen.* Offenbar sind $f'_1(x)$, $f'_2(x)$, $f''_1(x)$ in $\langle 0, \pi \rangle$ vorhanden und stetig. Ferner ist

$$f_1(0) = f_1(\pi) = f''_1(0) = f''_1(\pi) = 0, \quad f_2(0) = f_2(\pi) = 0. \tag{5}$$

Wir machen mit *Fourier* den Ansatz

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin n x. \tag{6}$$

Wie man leicht sieht, ist die Reihe rechterhand für alle x in $\langle 0, \pi \rangle$ und alle t in $\langle 0, T \rangle$ unbedingt und gleichmäßig konvergent. Ist

$$U_n(0) = c_n', \qquad \frac{dU_n(0)}{dt} = c_n'', \tag{7}$$

so sind, sofern (6) sich in bezug auf t gliedweise differentiieren läßt, augenscheinlich die Randbedingungen (3) erfüllt.

Es ist weiter

$$u^2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Big(\sum_{l=1}^{\infty} U_l(t) \sin l\beta \Big)^2 \sin n\beta \, d\beta = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t) \sin nx,$$
$$z_n(t) = \sum_{k,j}^{1 \cdots \infty} a_{kj}^{(n)} U_k(t) U_j(t), \qquad a_{kj}^{(n)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin k\beta \sin j\beta \sin n\beta \, d\beta; \tag{8}$$

mithin wegen (1) und (6), sofern, wie wir voraussetzen wollen, die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 U_n(t) \sin nx \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 U_n(t)}{dt^2} \sin nx$$

für alle x in $\langle 0, \pi \rangle$ und alle t in $\langle 0, T \rangle$ gleichmäßig konvergieren,

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n^2 U_n(t) \sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 U_n(t)}{dt^2} \sin nx = \sum_{n,k,j}^{1 \cdots \infty} a_{kj}^{(n)} U_k(t) U_j(t) \sin nx, \tag{9}$$

darum für alle ganzzahligen positiven n

$$\frac{d^2 U_n(t)}{dt^2} + n^2 U_n(t) = -\sum_{k,j}^{1 \cdots \infty} a_{kj}^{(n)} U_k(t) U_j(t). \tag{10}$$

Wie man leicht verifiziert, ist diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 U_n(t)}{dt^2} + n^2 U_n(t) = F_n(t), \tag{11}$$

die den Anfangsbedingungen (7) genügt, gleich

$$U_n(t) = c_n' \cos nt + \frac{c_n''}{n} \sin nt + \frac{1}{n} \int_0^t \sin n(t-\delta) F_n(\delta) \, d\delta. \tag{12}$$

Im vorliegenden Falle ist

$$F_n(t) = -\sum_{k,j}^{1 \cdots \infty} a_{kj}^{(n)} U_k(t) U_j(t), \tag{13}$$

darum

$$U_n(t) = c_n' \cos nt + \frac{c_n''}{n} \sin nt - \frac{1}{n} \int_0^t \sin n(t-\delta) \, d\delta \sum_{k,j}^{1 \cdots \infty} a_{kj}^{(n)} U_k(\delta) U_j(\delta). \tag{14}$$

Wir setzen

$$U_n(t) = c_n' \cos nt + \frac{c_n''}{n} \sin nt + \frac{1}{n^2} W_n(t), \qquad n^2 c_n' = C_n', \qquad n c_n'' = C_n'' \tag{15}$$

und erhalten

$$(16)\quad W_n(t) = -n\int_0^t \sin n(t-\delta)\,d\delta \sum_{k,j}^{1\cdots\infty} \frac{a_{kj}^{(n)}}{k^2 j^2}\left(C_k' \cos k\delta + C_k'' \sin k\delta + W_k(\delta)\right) \cdot \left(C_j' \cos j\delta + C_j'' \sin j\delta + W_j(\delta)\right).$$

Die für alle $n \geqq 1$ bestehenden Beziehungen (16) bilden ein System von Integralgleichungen zur Bestimmung der $W_n(t)$. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß sie für alle hinreichend kleinen T und $0 \leqq t \leqq T$ eine und nur eine Lösung haben.

Wir bemerken vor allen Dingen, daß sich $a_{kj}^{(n)}$ durch teilweise Integration auf die folgende Form bringen läßt:

$$(17)\quad a_{kj}^{(n)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin k\beta \sin j\beta \sin n\beta\, d\beta = \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \cos n\beta \frac{d}{d\beta}(\sin k\beta \sin j\beta)\, d\beta$$

$$= -\frac{2}{n^2\pi}\int_0^\pi \sin n\beta \frac{d^2}{d\beta^2}(\sin k\beta \sin j\beta)\, d\beta$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\int_0^\pi \sin n\beta\,((k^2+j^2)\sin k\beta \sin j\beta - 2kj \cos k\beta \cos j\beta)\, d\beta.$$

Hieraus folgt weiter

$$(18)\quad \frac{n\,a_{kj}^{(n)}}{k^2 j^2} = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{j^2}+\frac{1}{k^2}\right)b_{kj}^{(n)} + \frac{1}{jk}\,d_{kj}^{(n)}\right)$$

$$\text{mit}\quad b_{kj}^{(n)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin k\beta \sin j\beta \sin n\beta\, d\beta = a_{kj}^{(n)}$$

$$\text{und}\quad d_{kj}^{(n)} = -\frac{4}{\pi}\int_0^\pi \cos k\beta \cos j\beta \sin n\beta\, d\beta,$$

mithin, da $k \geqq 1$, $j \geqq 1$ ist,

$$(19)\quad \frac{n\,|a_{kj}^{(n)}|}{k^2 j^2} \leqq \frac{1}{n}\,(2\,|b_{kj}^{(n)}| + |d_{kj}^{(n)}|).$$

Nach bekannten Sätzen ist

$$\sum_n^{1\cdots\infty} (b_{kj}^{(n)})^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 k\beta \sin^2 j\beta\, d\beta < 2,$$

$$\sum_n^{1\cdots\infty} (d_{kj}^{(n)})^2 = \frac{8}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 k\beta \cos^2 j\beta\, d\beta < 8,$$

darum

$$\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{n\,|a_{kj}^{(n)}|}{k^2 j^2}\right)^2 \leqq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\sum_{n=1}^\infty (2\,|b_{kj}^{(n)}| + |d_{kj}^{(n)}|)^2$$

$$\leqq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\sum_{n=1}^\infty 8\,(b_{kj}^{(n)})^2 + 2(d_{kj}^{(n)})^2 < 32\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{32\pi^2}{6},$$

und

$$(20)\quad \sum_{n=1}^\infty \frac{n\,|a_{kj}^{(n)}|}{k^2 j^2} < \pi\sqrt{\frac{32}{6}} < 3\pi.$$

Wir versuchen jetzt die Gleichungen (16) durch sukzessive Approximationen aufzulösen, indem wir

$$(21) \qquad W_n^{(0)}(t) = 0 \text{ und für } m \geqq 1$$

$$W_n^{(m)}(t) = -n \int_0^t \sin n(t-\delta)\, d\delta \sum_{k,j}^{1\cdots\infty} \frac{a_{kj}^{(n)}}{k^2 j^2} \left(C_k' \cos k\delta + C_k'' \sin k\delta + W_k^{(m-1)}(\delta)\right)$$
$$\cdot \left(C_j' \cos j\delta + C_j'' \sin j\delta + W_j^{(m-1)}(\delta)\right)$$

setzen. Wir überzeugen uns unmittelbar, daß, wenn $\sum_n^{1\cdots\infty} |W_n^{(m-1)}(t)|$ konvergiert, auch $\sum_n^{1\cdots\infty} |W_n^{(m)}(t)|$ konvergent ist, mithin, da doch nach Voraussetzung $\sum_n^{1\cdots\infty} |C_n'| = \sum n^2 |c_n'|$ und $\sum |C_n''| = \sum n |c_n''|$ sowie $\sum |W_n^{(0)}(t)|$ konvergieren, die rekurrente Operation (21) für alle m einen Sinn hat.

Es ist nun leicht zu sehen, daß $\sum_n |W_n^{(m)}(t)|$ für alle m, sofern T hinreichend klein ist, unterhalb einer festen Schranke liegt. In der Tat ist zunächst, wenn wir

$$(21^*) \qquad \mathfrak{W}^{(m)} = \operatorname{Max} \sum_n |W_n^{(m)}(t)| \text{ für } 0 \leqq t \leqq T$$

setzen, wegen (20)

$$(22) \qquad \mathfrak{W}^{(m)} \leqq 3\pi T (C + \mathfrak{W}^{(m-1)})^2, \quad C = \sum_n (|C_n'| + |C_n''|).$$

Die Folge $\mathfrak{W}^{(m)}$ ist gewiß beschränkt, wenn die Folge

$$(23) \qquad R_m = 6\pi T (C^2 + R_{m-1}^2), \quad R_0 = 0$$

die gleiche Eigenschaft hat, denn es ist stets

$$(24) \qquad \mathfrak{W}^{(m)} \leqq R_m.$$

Es möge nun für alle $m \leqq l$ etwa

$$(25) \qquad R_m \leqq 1$$

sein. Aus (23) folgt

$$(26) \qquad R_{m+1} - R_m = 6\pi T (R_m - R_{m-1})(R_m + R_{m-1}),$$

darum

$$(27) \qquad |R_{m+1} - R_m| \leqq 12\pi T |R_m - R_{m-1}|,$$

mithin wegen

$$R_{l+1} = R_1 + (R_2 - R_1) + \cdots + (R_{l+1} - R_l),$$
$$(28) \qquad R_{l+1} \leqq R_1 + |R_2 - R_1| + \cdots + |R_{l+1} - R_l|$$
$$\leqq 6\pi T C^2 (1 + 12\pi T + \cdots + (12\pi T)^l) < \frac{6\pi T C^2}{1 - 12\pi T},$$

sofern, wie wir voraussetzen wollen, $12\pi T < 1$ ist.

Wählt man nun

$$T < \frac{1}{24\pi}, \quad T < \frac{1}{12\pi C^2}, \tag{29}$$

so wird

$$R_{l+1} < 12\pi T C^2 < 1. \tag{30}$$

Da nun

$$R_1 = 6\pi T C^2 < \frac{1}{2}$$

ist, so gilt (25) für alle m. Die Folge R_m, darum auch, wie behauptet, die Folge $\mathfrak{W}^{(m)}$ sind beschränkt.

Wir beweisen jetzt, daß die Reihe

$$\sum |W_n^{(1)}(t)| + \sum_{m}^{1\cdots\infty} \sum_{n}^{1\cdots\infty} |W_n^{(m+1)}(t) - W_n^{(m)}(t)| \tag{31}$$

konvergiert. Wir gehen von der Gleichung (21) und der hierzu korrespondierenden Gleichung

$$W_n^{(m+1)}(t) = -n \int_0^t \sin n(t-\delta)\, d\delta \tag{32}$$

$$\cdot \sum_{k,j}^{1\cdots\infty} \frac{a_{kj}^{(n)}}{k^2 j^2} \left(C_k' \cos k\delta + C_k'' \sin k\delta + W_k^{(m)}(\delta)\right)\left(C_j' \cos j\delta + C_j'' \sin j\delta + W_j^{(m)}(\delta)\right)$$

aus. Sie geben, wie man leicht verifiziert,

$$W_n^{(m+1)}(t) - W_n^{(m)}(t) = -n \int_0^t \sin n(t-\delta)\, d\delta \tag{33}$$

$$\cdot \sum_{k,j}^{1\cdots\infty} \frac{a_{kj}^{(n)}}{k^2 j^2} \Big\{ (C_k' \cos k\delta + C_k'' \sin k\delta)\,(W_j^{(m)}(\delta) - W_j^{(m-1)}(\delta))$$
$$+ (C_j' \cos j\delta + C_j'' \sin j\delta)\,(W_k^{(m)}(\delta) - W_k^{(m-1)}(\delta))$$
$$+ W_k^{(m)}(\delta)\,(W_j^{(m)}(\delta) - W_j^{(m-1)}(\delta)) + W_j^{(m-1)}(\delta)\,(W_k^{(m)}(\delta) - W_k^{(m-1)}(\delta)) \Big\}.$$

Ist die Reihe

$$\sum_n |W_n^{(m)}(t) - W_n^{(m-1)}(t)|$$

konvergent, so ist, wie man aus (33) wegen (20) leicht schließt, auch die Reihe

$$\sum_n |W_n^{(m+1)}(t) - W_n^{(m)}(t)|$$

konvergent. Aus (33) folgt überdies wegen (24) und (25) leicht

$$\sum_n |W_n^{(m+1)}(t) - W_n^{(m)}(t)| \leqq 3\pi T(2C+2) \sum_n |W_n^{(m)}(t) - W_n^{(m-1)}(t)|. \tag{34}$$

Wählt man T auch noch der Ungleichheit

$$T \leqq \frac{q}{6\pi(1+C)}, \quad q < 1 \tag{35}$$

gemäß, so konvergiert, wie behauptet, die Reihe

$$\sum_n^{1\cdots\infty} |W_n^{(1)}(t)| + \sum_n^{1\cdots\infty} |W_n^{(2)}(t) - W_n^{(1)}(t)| + \sum_n^{1\cdots\infty} |W_n^{(3)}(t) - W_n^{(2)}(t)| + \cdots, \tag{36}$$

übrigens natürlich für alle t in $0 \leqq t \leqq T$ gleichmäßig. Hieraus folgt vor allem, daß alle Grenzwerte

$$\lim_{m\to\infty} W_n^{(m)}(t)$$

existieren und stetige Funktionen von t darstellen. Es sei

$$W_n(t) = \lim_{m\to\infty} W_n^{(m)}(t). \tag{37}$$

Aus (21*), (24) und (25) folgt für alle t in $\langle 0, T\rangle$

$$\sum_n^{1\cdots\infty} |W_n(t)| \leqq 1. \tag{38}$$

Aus der Konvergenz von (36) folgt weiter, daß

$$W(t) = \sum_n^{1\cdots\infty} W_n(t) = \lim_{m\to\infty} \sum_n^{1\cdots\infty} W_n^{(m)}(t) \tag{39}$$

ist. Aus der Gleichung (21) erhalten wir ohne Schwierigkeiten für $m \to \infty$

$$W_n(t) = -n \int_0^t \sin n(t-\delta)\, d\delta \tag{40}$$

$$\cdot \sum_{k,j}^{1\cdots\infty} \frac{a_{kj}^{(n)}}{k^2 j^2} \left(C_k' \cos k\delta + C_k'' \sin k\delta + W_k(\delta)\right)\left(C_j' \cos j\delta + C_j'' \sin j\delta + W_j(\delta)\right).$$

Es sei jetzt

$$U_n(t) = c_n' \cos nt + \frac{c_n''}{n} \sin nt + \frac{1}{n^2} W_n(t), \quad c_n' = \frac{C_n'}{n^2}, \quad c_n'' = \frac{C_n''}{n} \tag{41}$$

gesetzt. Die Funktionen $U_n(t)$ erfüllen die Integralbeziehungen (14), somit mit

$$F_n(t) = -\sum_{k,j}^{1\cdots\infty} a_{kj}^{(n)}\, U_k(t)\, U_j(t)$$

die Differentialgleichungen (11). Setzt man hier vorübergehend für $U_k(t)$, $U_j(t)$ ihre Werte aus (41) ein, so überzeugt man sich fast unmittelbar, daß die Reihe $\sum_n |F_n(t)|$ und darum nach (12) auch $\sum_n \left|\frac{dU_n(t)}{dt}\right|$ konvergiert. Da ferner $\sum_n n^2 |U_n(t)|$ konvergiert, so ist wegen (11) auch die Reihe $\sum_n \left|\frac{d^2 U_n(t)}{dt^2}\right|$ konvergent. Aus alledem folgt unmittelbar, daß

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin nx \tag{40}$$

gewiß eine in dem Bereiche

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq t \leqq T$$

nebst ihren partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ stetige Funktion darstellt. Indem man jetzt den vorhin eingeschlagenen Weg in der umgekehrten

Richtung geht, überzeugt man sich ohne jegliche Schwierigkeiten, daß $u(x, t)$ die Differentialgleichung (1) und die Randbedingungen (2), (3) erfüllt.

Die vorhin gefundene Lösung ist die einzige, die sich in eine gleichmäßig konvergente Reihe von der Form $\sum U_n(t) \sin nx$ *entwickeln läßt und die so beschaffen ist, daß auch*

$$\sum n^2 |U(t)| \quad \text{und} \quad \sum \left| \frac{d^2 U_n(t)}{dt^2} \right|$$

gleichmäßig konvergieren. Der Beweis läuft, wie man leicht sieht, auf den Nachweis hinaus, daß die Integralgleichungen (40) keine von der vorhin gefundenen verschiedene Lösung $\overline{W}_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ haben, die so beschaffen ist, daß $\sum |\overline{W}(t_n)|$ konvergiert. Daß dem wirklich so ist, läßt sich aus der Betrachtung der Ausdrücke $\sum_n |W_n(t) - W_n^{(m)}(t)|$ erschließen. In der Tat folgt aus (32) und aus der Gleichung

$$\overline{W}_n(t) = -n \int_0^t \sin n(t-\delta)\, d\delta \tag{41}$$

$$\sum_{k,j}^{(n)} \frac{a_{kj}^{(n)}}{k^2 j^2} \left(C_k' \cos k\delta + C_k'' \sin k\delta + \overline{W}_k(\delta)\right) \left(C_j' \cos j\delta + C_j'' \sin j\delta + \overline{W}_j(\delta)\right),$$

wie man leicht nachprüft,

$$\begin{aligned} \overline{W}_n(t) - W_n^{(m+1)}(t) = -n \int_0^t \sin n(t-\delta)\, d\delta \\ \cdot \sum_{k,j} \frac{a_{kj}^{(n)}}{k^2 j^2} \Big\{ &\left(C_k' \cos k\delta + C_k'' \sin k\delta\right) \left(\overline{W}_j(\delta) - W_j^{(m)}(\delta)\right) \\ &+ \left(C_j' \cos j\delta + C_j'' \sin j\delta\right) \left(\overline{W}_k(\delta) - W_k^{(m)}(\delta)\right) \\ &+ \overline{W}_k(\delta) \left(\overline{W}_j(\delta) - W_j^{(m)}(\delta)\right) + W_j^{(m)}(\delta) \left(\overline{W}_k(\delta) - W_k^{(m)}(\delta)\right) \Big\}. \end{aligned} \tag{42}$$

Hieraus folgt, wenn etwa

$$\sum_n |\overline{W}_n(t)| \leqq C \tag{43}$$

angenommen wird, wegen $\sum_n |W_n^{(m)}| \leqq 1$

$$\sum_n |\overline{W}_n(t) - W_n^{(m+1)}(t)| \leqq 3\pi T (2C + \overline{C} + 1) \sum_n |\overline{W}_n(t) - W_n^{(m)}(t)|. \tag{44}$$

Genügt T, außer den Ungleichheiten (35), auch noch der Beziehung

$$T < \frac{q}{3\pi(2C + \overline{C} + 1)}, \quad q < 1, \tag{45}$$

so ist augenscheinlich

$$\lim_{m \to \infty} \sum_n |\overline{W}_n(t) - W_n^{(m+1)}(t)| = 0,$$

mithin

$$\overline{W}_n(t) = \lim_{m \to \infty} W_n^{(m)}(t),$$

demnach

$$\overline{W}_n(t) = W_n(t) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Hierdurch ist die Unität der Lösung für hinreichend kleine T gewährleistet. Durch schrittweise Fortsetzung läßt sich zeigen, daß die beiden Lösungen U und $\overline{U}$ in dem ganzen gemeinsamen Existenzbereich zusammenfallen.

§ 2.

Die Ergebnisse des § 1 lassen sich verallgemeinern. Es sei zunächst $p_2(x, t)$ irgendeine in dem Bereiche $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq t \leqq T$ erklärte, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in bezug auf x stetige Funktion. *Die Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p_2(x, t)\, u^2 \tag{46}$$

läßt sich ganz wie die Gleichung (1) *behandeln.* Die Formeln (6), (7), (8), (9) gelten unverändert, diesmal mit

$$a_{k,j}^{(n)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi p_2(\beta, t) \sin k\beta \sin j\beta \sin n\beta\, d\beta\,. \tag{47}$$

Eine teilweise Integration liefert jetzt

$$a_{k,j}^{(n)} = -\frac{2}{n^2 \pi} \int_0^\pi \sin n\beta \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (p_2(\beta, t) \sin k\beta \sin j\beta)\, d\beta. \tag{48}$$

Die Reihe $\sum_n{}' \frac{n\,|\,a_{kj}^{(n)}\,|}{k^2 j^2}$ konvergiert, alle weiteren Schlußfolgerungen bestehen darum zu Recht.

Handelt es sich weiter um die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p_3(x, t)\, u^3, \tag{49}$$

wo p_3 sich wie p_2 verhält, so bedürfen unsere Entwicklungen nur einer unwesentlichen Modifikation, um zum Ziele zu führen. Die Gleichung (9) nimmt jetzt die Form

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n^2 U_n(t) \sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 U_n(t)}{dt^2} \sin nx = \sum_{n,k,j,l} a_{k,j,l}^{(n)} U_k(t)\, U_j(t)\, U_l(t) \sin nx,$$

$$a_{k,j,l}^{(n)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi p_3(\beta, t) \sin k\beta \sin j\beta \sin l\beta \sin n\beta\, d\beta \tag{50}$$

$$= -\frac{2}{n^2 \pi} \int_0^\pi \sin n\beta \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (p_3(\beta, t) \sin k\beta \sin j\beta \sin l\beta)\, d\beta$$

an. Für (20) tritt jetzt die Reihe $\sum_n{}' \frac{n\,|\,a_{kjl}^{(n)}\,|}{k^2 j^2 l^2}$ ein, die augenscheinlich konvergiert. Der Konvergenzbeweis ist mutatis mutandis wie in § 1 zu führen.

Die Ausdehnung der Resultate auf eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\nu=2}^{\infty} p_\nu(x, t)\, u^\nu$$

dürfte keinerlei ernstlichen Schwierigkeiten begegnen.

Wir sind in § 1 von dem rechteckigen Bereiche $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq t \leqq T$ ausgegangen. Betrachten wir jetzt den Bereich, der von der Strecke $\langle 0, \pi \rangle$ der x-Achse, einer hierzu im Abstande t^* gelegten Parallelen und den beiden Kurvenstücken Γ_1 und Γ_2 mit den Gleichungen

$$x = h_1(t) \quad \text{und} \quad x = h_2(t) \tag{51}$$

begrenzt ist. Die Funktionen $h_1(t)$ und $h_2(t)$ seien in $\langle 0, t^* \rangle$ nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig. Es gelte

$$h_1(0) = 0, \quad h_2(0) = \pi \quad \text{sowie} \quad h_2(t) > h_1(t). \tag{52}$$

Die Bestimmung derjenigen in T regulären Lösung der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u^2$, die den Randbedingungen

$$u = f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f_2(x) \text{ für } t = 0, \quad u = 0 \text{ auf } \Gamma_1 \text{ und } \Gamma_2 \tag{53}$$

genügt, läßt sich in naheliegender Weise durch Einführung geeigneter neuer Variablen auf die Auflösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u^2 \tag{54}$$

in einem rechteckigen Bereiche unter Zugrundelegung von Randbedingungen, die zu (2) und (3) analog sind, zurückführen, ist also der Fourierschen Integrationsmethode zugänglich.

Man setze, in der Tat, zunächst

$$x = h_1(t) + \frac{x}{\pi}(h_2(t) - h_1(t)). \tag{55}$$

Dem soeben betrachteten Bereiche der Ebene x, t entspricht in der Ebene x, t das Rechteck

$$\langle 0, \pi \rangle, \quad \langle 0, t^* \rangle. \tag{56}$$

Die Differentialgleichung (54) geht dabei über in

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\pi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(h_2(t) - h_1(t))^2 = \frac{1}{\pi^2}(h_2(t) - h_1(t))^2 u^2. \tag{57}$$

Setzt man auch noch

$$t = \pi \int_0^t \frac{dt}{h_2(t) - h_1(t)},$$

so erhalten wir in der Ebene x, t das Rechteck

$$\langle 0, \pi \rangle, \quad \langle 0, t^* \rangle, \quad t^* = \pi \int_0^{t^*} \frac{dt}{h_2(t) - h_1(t)}. \tag{58}$$

Die Funktion u genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\pi^2}(h_2(t) - h_1(t))^2 u^2 \tag{59}$$

und den Randbedingungen

$$u = f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f_2(x) \text{ für } t = 0, \quad u = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = \pi. \tag{60}$$

§ 3.

Den Betrachtungen des § 1 lag die spezielle Voraussetzung zugrunde, die gesuchte Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung (1) sei für $x = 0$ und $x = \pi$ identisch gleich Null. *Wir nehmen jetzt allgemeiner an, es soll*

$$u = \varphi_1(t) \text{ für } x = 0, \quad u = \varphi_2(t) \text{ für } x = \pi \tag{61}$$

sein, unter φ_1 und φ_2 Funktionen verstanden, die in dem Intervalle $0 \leqq t \leqq T$ erklärt sind und sich daselbst nebst ihren Ableitungen der vier ersten Ordnungen stetig verhalten. Darüber hinaus sind, wie vorhin, die Werte von u und $\frac{\partial u}{\partial t}$ für $t = 0$ vorgeschrieben,

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = f_2(x). \tag{62}$$

Wir nehmen an, daß $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sich, wie vorhin, in der Form

$$f_1(x) = \sum c'_n \sin nx, \quad f_2(x) = \sum c''_n \sin nx \tag{63}$$

mit konvergenten $\sum n^2 |c'_n|$ und $\sum n |c''_n|$ darstellen lassen.

Schließlich soll

$$\varphi_1(0) = \varphi_1'(0) = \varphi_1''(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = \varphi_2'(0) = \varphi_2''(0) = 0 \tag{64}$$

sein. Wir wollen zeigen, daß die in § 1 dargestellte Methode auch jetzt die Existenz und Einzigartigkeit der Lösung zu beweisen gestattet. Natürlich wird es sich auch diesmal um die Werte der Zeit t in einem hinreichend kleinen Intervall $\langle 0, T \rangle$ handeln.

Wir gehen, um den Beweis zu führen, von einer Funktion $F(x, t)$ aus, die wie folgt definiert ist:

$$F(x, t) = \begin{cases} F_1(x, t) = \varphi_1(t) + \frac{x^2}{2}(\varphi_1''(t) + \varphi_1^2(t)) \text{ für } 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}, \\ F_2(x, t) = \varphi_2(t) + \frac{(x-\pi)^2}{2}(\varphi_2''(t) + \varphi_2^2(t)) \\ \qquad\qquad \text{in dem Intervall } \langle \frac{2\pi}{3}, \pi \rangle, \\ F_1(x, t) + (F_2(x, t) - F_1(x, t))\, p\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \text{ für } \frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{2\pi}{3}. \end{cases} \tag{65}$$

Hier bezeichnet $p(x)$ irgendeine in $\langle 0, \frac{\pi}{3} \rangle$ erklärte, nebst ihren Ableitungen der vier ersten Ordnungen stetige Funktion, die den Bedingungen

$$(66)\qquad p(0)=p'(0)=p''(0)=p'''(0)=p^{(4)}(0)=0,$$
$$p\left(\frac{\pi}{3}\right)=1,\quad p'\left(\frac{\pi}{3}\right)=p''\left(\frac{\pi}{3}\right)=p'''\left(\frac{\pi}{3}\right)=p^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$$

genügt. Augenscheinlich sind die Funktionen F, $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$ nebst ihren Ableitungen der vier ersten Ordnungen in bezug auf x stetig. Des weiteren ist

$$F(0,t)=\varphi_1(t),\quad F(\pi,t)=\varphi_2(t).$$

Die Funktionen $F(x,0)$ und $\frac{\partial F(x,0)}{\partial t}$ lassen sich wegen (65) gewiß in der Form $\sum f_n' \sin nx$ und $\sum f_n'' \sin nx$ mit konvergenten $\sum n^2 |f_n'|$ und $\sum n |f_n''|$ darstellen. Die Funktion

$$(67)\qquad G(x,t)=-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+F^2(x,t)$$

ist gewiß nebst ihren Ableitungen $\frac{\partial G}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ in $\langle 0,\pi\rangle$, $\langle 0,T\rangle$ stetig. Es ist weiter, wie man leicht verifiziert,

$$(68)\qquad G(0,t)=G(\pi,t)=0;$$

$G(x,t)$ läßt sich also gewiß in eine trigonometrische Reihe

$$(69)\qquad G(x,t)=\sum \gamma_n(t)\sin nx$$

entwickeln. Wie man leicht zeigt, ist $\sum n|\gamma_n(t)|$ gleichmäßig konvergent.

Betrachten wir jetzt die Funktion

$$(70)\qquad u^*(x,t)=u(x,t)-F(x,t).$$

Sie genügt der Differentialgleichung

$$(71)\qquad \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2}=G(x,t)+2F(x,t)u^*+u^{*2}$$

und erfüllt die Randbedingungen

$$u^*=0 \text{ für } x=0 \text{ und } x=\pi,$$
$$(72)\qquad u^*=f_1(x)-F(x,0)=g_1(x),\quad \frac{\partial u^*}{\partial t}=f_2(x)-\frac{\partial F(x,0)}{\partial t}=g_2(x) \text{ für } t=0.$$

Offenbar kann

$$(73)\qquad g_1(x)=\sum g_n' \sin nx,\quad g_2(x)=\sum g_n'' \sin nx$$

gesetzt werden. Die Reihen $\sum n^2 |g_n'|$ und $\sum n |g_n''|$ konvergieren.

Die weiteren Betrachtungen verlaufen denjenigen des § 1 parallel. Es sind jetzt lediglich die beiden auf der rechten Seite der Gleichung (71) neu hinzukommenden Glieder $G(x,t)$ und $2F(x,t)u^*$ zu berücksichtigen. Wir setzen also

$$(74)\qquad u^*(x,t)=\sum_n U_n(t)\sin nx,$$

$$U_n(t)=g_n'\cos nt+\frac{1}{n}g_n''\sin nt+\frac{1}{n^2}W_n(t),\quad n^2 g_n'=G_n',\quad n g_n''=G_n''$$

und erhalten zur Bestimmung von $W_n(t)$ die Integralgleichungen

$$(75)\qquad W_n(t) = -n\int_0^t \sin n(t-\delta)\,d\delta \cdot \Big\{\gamma_n(\delta) + \sum_k l_k^{(n)}(G_k' \cos k\delta + G_k'' \sin k\delta + W_k(\delta)) + \sum_{k,j} a_{kj}^{(n)}(G_k' \cos k\delta + G_k'' \sin k\delta + W_k(\delta)) \cdot (G_j' \cos j\delta + G_j'' \sin j\delta + W_j(\delta)\Big\}$$

mit

$$l_k^{(n)} = \frac{4}{k^2\pi}\int_0^\pi \sin k\beta \sin n\beta F(\beta,\delta)\,d\beta = \frac{4}{n^2k^2\pi}\int_0^\pi \sin n\beta \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(\sin k\beta F(\beta,\delta))\,d\beta.$$

Offenbar ist $\sum_n n\,|\,l_k^{(n)}\,|$ konvergent.

Die Gleichungen (75) werden wie in § 1 die Gleichungen (16) durch sukzessive Approximationen gelöst. Die Bestimmung einer oberen Schranke für $\sum |W_n^{(m)}|$ sowie alsdann der Konvergenzbeweis des Verfahrens bieten keine neuen Schwierigkeiten dar.

Leipzig, den 8. Dezember 1926.

Über die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen, denen die sechs hyperelliptischen Quotienten $\frac{\sigma_{\alpha\beta}(u,v)}{\sigma(u,v)}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)_{\alpha \leqq \beta}$ genügen.

Von *Friedrich Schottky* in Berlin.

§ 1.

In der vorliegenden Arbeit handelt es sich um ein ganz spezielles System partieller Differentialgleichungen, das nicht unbekannt ist. Ehe ich es aufstelle, in der Form, die mir als die einfachste erscheint, gehe ich, um den Sinn der Aufgabe deutlich zu machen, mit einigen Worten auf andere, gewöhnliche Differentialgleichungen ein, die noch viel bekannter sind.

Es sei das Integral gegeben:

$$u = \int_y^x \frac{dz}{2\sqrt{(z-c_1)(z-c_2)(z-c_3)(z-c_4)}},$$

mit willkürlichen Grenzen x, y. Zur Abkürzung möge das Produkt $(z-c_\alpha)(z-c_\beta)$, in dem c_α, c_β irgend zwei der vier untereinander verschiedenen Größen c_1, c_2, c_3, c_4 bedeuten, mit $z_{\alpha\beta}$ bezeichnet werden. Das Integral u kann dann auch dargestellt werden in der Form

$$u = \int_y^x \frac{dz}{2\sqrt{z_{12}z_{34}}}.$$

Bildet man den in den Grenzen des Integrals algebraischen Ausdruck

$$\frac{\sqrt{x_{12}y_{34}} + \sqrt{y_{12}x_{34}}}{x-y},$$

der mit dem *Euler*schen Additionstheorem zusammenhängt, und fügt man diesem die beiden andern hinzu, die aus ihm hervorgehen, indem man die Zahlen 1, 2, 3, 4 unter einander vertauscht, so hat man drei Funktionen von u. Sie sind die elliptischen Sigma-Quotienten, in *Weierstraß*scher Bezeichnung

$$\frac{\sigma_\alpha(u)}{\sigma(u)};$$

sie haben die Differential-Eigenschaft, daß das Produkt zweier immer gleich dem mit negativem Vorzeichen versehenen Differentialquotienten des dritten ist. Wesent-

lich dieselbe Eigenschaft, nur daß die betreffenden Faktoren andere sind, haben die *Jacobi*schen Größen sin am u, cos am u, Δ am u, die *Abel*schen $\varphi(u)$, $f(u)$, $F(u)$, und auch, als Funktionen der Zeit t betrachtet, die *Euler*schen Komponenten p, q, r bei der Drehung eines Körpers um seinen Schwerpunkt. Alle diese historisch wichtigen Systeme von je drei Größen gehen ineinander über durch eine lineare Änderung der Variabeln, und, wo es nötig ist, durch Hinzufügung konstanter Faktoren zu den Funktionen.

Davon gibt es eine Erweiterung. Statt des einen Integrals u nehmen wir die beiden:

$$u = \int_y^x \frac{dz}{2\sqrt{R(z)}}, \qquad v = \int_y^x \frac{z\,dz}{2\sqrt{R(z)}},$$

in denen $R(z)$ die ganze Funktion fünften Grades

$$R(z) = z(z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)(z - c_4)$$

bedeutet, und wo c_1, c_2, c_3, c_4 nicht nur voneinander, sondern auch von 0 verschieden sind.

Wir bilden aus den Grenzen der Integrale den dem vorigen ähnlichen Ausdruck

$$S_{12} = \frac{\sqrt{x_{12} y y_{34}} + \sqrt{y_{12} x x_{34}}}{x - y}$$

und fügen die fünf andern hinzu: $S_{13}, \ldots, S_{34}$, die aus ihm durch die Vertauschung der vier Zahlen entstehen. Das sind sechs Funktionen von u und v, und zwar die hyperelliptischen Sigma-Quotienten

$$S_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}(u, v)}{\sigma(u, v)}.$$

Der gemeinsame Nenner ist, ebenso wie bei den elliptischen Quotienten, eine ungerade Funktion, die Zähler sind gerade.

Ich nenne diese sechs Größen Komponenten. Jede ist durch eine zweigliedrige Kombination der Elemente 1, 2, 3, 4 bezeichnet. Zwei Komponenten, z. B. S_{12} und S_{13}, bei denen diese Kombinationen ein Element gemeinsam haben, sollen benachbarte heißen, zwei dagegen, z. B. S_{12} und S_{34}, deren Indizes kein Element gemeinsam haben, nennen wir: einander gegenüberstehende. Endlich: von drei Komponenten, deren Indizes zusammengenommen nur drei Elemente enthalten, z. B. S_{12}, S_{13}, S_{23}, sagen wir, daß sie eine Gruppe bilden, und von jeder der drei, daß sie die Ergänzung der beiden andern bildet. So ist z. B. S_{12} die ergänzende Komponente von S_{13} und S_{23}, oder von S_{14} und S_{24}.

Läßt man diese Definitionen zu, so gilt der Satz:

Das Produkt zweier benachbarter Komponenten ist immer linear in den beiden Ableitungen der sie ergänzenden; z. B. $S_{13}\, S_{23}$ in $\frac{\partial S_{12}}{\partial u}$ und $\frac{\partial S_{12}}{\partial v}$.

Die genaue Formel, die später durch eine kurze Bemerkung bewiesen wird, lautet:

$$S_{13}\, S_{23} = -\frac{\partial S_{12}}{\partial u} - c_3 \frac{\partial S_{12}}{\partial v}.$$

Die Differentialgleichung ist also der für die elliptischen Sigma-Quotienten geltenden so ähnlich wie nur möglich.

Ein großer Unterschied gegen die elliptischen Differentialgleichungen aber ergibt sich, wenn man die algebraischen Gleichungen in Betracht zieht, die zwischen den Komponenten $S_{\alpha\beta}$ bestehen. Drei voneinander unabhängige lineare Gleichungen bestehen zwischen den Quadraten der $S_{\alpha\beta}$, und eine ebenfalls lineare zwischen den drei Produkten sich gegenüberstehender Komponenten. Das läßt sich mit einiger Rechnung aus den Ausdrücken der Komponenten folgern, etwas leichter aus den Differentialgleichungen. Aus den Ausdrücken der $S_{\alpha\beta}$ ergibt sich, daß die letzte Gleichung, die zwischen den drei Produkten, homogen ist, und das folgt nicht aus den Differentialgleichungen. Die Funktionen, die den Differentialgleichungen genügen, sind daher im allgemeinen nicht einfache Sigma-Quotienten, sondern andere Funktionen, und da diese andern bei einigen physikalischen Aufgaben gebraucht werden, so ist es Pflicht der Mathematik, sie genau zu untersuchen.

$\sqrt{xy}$ ist ebenfalls ein Sigma-Quotient:

$$\sqrt{xy} = \frac{\sigma_{1234}(u, v)}{\sigma(u, v)}.$$

In diesem sind Zähler und Nenner ungerade Funktionen. Dividiert man alle $S_{\alpha\beta}$ durch die Größe $\sqrt{xy}$, so erhält man ein System von sechs anderen Komponenten:

$$\frac{S_{\alpha\beta}}{\sqrt{xy}} = T_{\alpha\beta},$$

die die entgegengesetzte Eigenschaft haben wie die $S_{\alpha\beta}$. Das Produkt zweier benachbarter ist nicht linear in den Ableitungen der sie ergänzenden, sondern in denen derjenigen Komponente, die der ergänzenden gegenübersteht; $T_{13}\,T_{23}$ ist nicht linear in $\frac{\partial T_{12}}{\partial u}$ und $\frac{\partial T_{12}}{\partial v}$, sondern in $\frac{\partial T_{34}}{\partial u}$ und $\frac{\partial T_{34}}{\partial v}$.

Dividiert man aber die $S_{\alpha\beta}$ durch eine lineare Funktion von $\sqrt{xy}$:

$$\omega = \varkappa + \lambda\sqrt{xy},$$

mit von 0 verschiedenen Koeffizienten $\varkappa$, λ, so vermischen sich bei den so entstehenden Funktionen

$$E_{\alpha\beta} = \frac{S_{\alpha\beta}}{\omega}$$

die Eigenschaften der $S_{\alpha\beta}$ und der $T_{\alpha\beta}$ miteinander; das Produkt zweier benachbarten Komponenten ist linear in den Ableitungen der ergänzenden Komponente und derjenigen, die der ergänzenden gegenübersteht. Es ist also z. B. $E_{13}\,E_{23}$ gleich einer viergliedrigen linearen Form, in der die Ableitungen

$$E'_{12} = \frac{\partial E_{12}}{\partial u}, \quad E''_{12} = \frac{\partial E_{12}}{\partial v}, \quad E'_{34} = \frac{\partial E_{34}}{\partial u}, \quad E''_{34} = \frac{\partial E_{34}}{\partial v}$$

die Rolle der Variabeln vertreten. Wegen der vollständigen Symmetrie des Systems kann man die vier Zahlen 1, 2, 3, 4 untereinander vertauschen. Daher ist $E_{14}\,E_{24}$ durch dieselben vier Größen linear ausdrückbar, und auch — durch Vertauschung

von 1 mit 4, 2 mit 3: $E_{13}\,E_{14}$, $E_{23}\,E_{24}$. Also auch jedes Produkt $(fE_{14}+gE_{23})\,(hE_{24}+kE_{13})$, bei willkürlichen Koeffizienten f, g, h, k.

Daraus ziehen wir den Schluß: Auch dann, wenn wir die Komponenten $E_{\alpha\beta}$ ändern, indem wir je zwei sich gegenüberstehende durch lineare Funktionen von ihnen ersetzen, bleibt die Differential-Eigenschaft der $E_{\alpha\beta}$ bestehen. Wenn wir die geänderten Komponenten mit $Q_{\alpha\beta}$ bezeichnen, so ist auch das Produkt zweier benachbarter $Q_{\alpha\beta}$ linear in den Ableitungen der ergänzenden Komponente und denen derjenigen Komponente, die der ergänzenden gegenübersteht.

Diese Transformation hat zwölf willkürliche Koeffizienten. Kann man sie so wählen, daß die $Q_{\alpha\beta}$ die einfachere Eigenschaft der $S_{\alpha\beta}$ haben, daß auch für sie das Produkt zweier benachbarter Komponenten linear in den Ableitungen der sie ergänzenden Komponente allein ist? Das erscheint fraglich; denn damit verlangt man von den zwölf Koeffizienten die Erfüllung von 24 Bedingungen. Dennoch ist es möglich, bei willkürlichen Werten von $\varkappa$ und λ. Ist aber $\varkappa = 0$, so hat man nur jede Komponente durch die ihr gegenüberstehende zu ersetzen, und ist $\lambda = 0$, so ist gar nichts zu ändern. Diese beiden Fälle dürfen wir daher ausschließen; wir betrachten sie als ganz singulär.

§ 2.

Es sollen jetzt die Differentialgleichungen der $E_{\alpha\beta}$ entwickelt werden. Geht man von den Gleichungen

$$du = \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} - \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}}, \qquad dv = \frac{x\,dx}{2\sqrt{R(x)}} - \frac{y\,dy}{2\sqrt{R(y)}},$$

$$E'_{12}\,du + E''_{12}\,dv = \frac{\partial E_{12}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial E_{12}}{\partial y}\,dy$$

aus, so ergibt sich:

$$E'_{12} = -\,y\,\frac{2\sqrt{R(x)}}{x-y}\,\frac{\partial E_{12}}{\partial x} - x\,\frac{2\sqrt{R(x)}}{x-y}\,\frac{\partial E_{12}}{\partial y},$$

$$E''_{12} = \qquad \frac{2\sqrt{R(x)}}{x-y}\,\frac{\partial E_{12}}{\partial x} + \frac{2\sqrt{R(y)}}{x-y}\,\frac{\partial E_{12}}{\partial y}.$$

Es ist

$$E_{12} = \frac{\sqrt{x_{12}y\,y_{34}} + \sqrt{y_{12}x\,x_{34}}}{N},$$

$$N = (x-y)\,\omega = (x-y)\,(\varkappa + \lambda\sqrt{xy}).$$

Daraus folgt, indem man die beiden Teile von E_{12} logarithmisch differenziert:

$$2\,\frac{\partial E_{12}}{\partial x} = \frac{\sqrt{x_{12}y\,y_{34}}}{N}\,\frac{\partial \log\left(\frac{x_{12}}{N^2}\right)}{\partial x} + \frac{\sqrt{y_{12}x\,x_{34}}}{N}\,\frac{\partial \log\left(\frac{x\,x_{34}}{N^2}\right)}{\partial x},$$

und da $\sqrt{R(x)} = \sqrt{x}\,\sqrt{x_{12}}\,\sqrt{x_{34}}$ ist:

$$\frac{2\sqrt{R(x)}}{x-y}\,\frac{\partial E_{12}}{\partial x} = \frac{x_{12}\sqrt{xy}\,\sqrt{x_{34}y_{34}}}{N(x-y)}\,\frac{\partial \log\left(\frac{x_{12}}{N^2}\right)}{\partial x} + \frac{x\,x_{34}\sqrt{x_{12}y_{12}}}{N(x-y)}\,\frac{\partial \log\left(\frac{x\,x_{34}}{N^2}\right)}{\partial x}.$$

Wir entwickeln zuerst die beiden logarithmischen Differentialquotienten und lösen dabei N^2 in die beiden Faktoren $(x-y)^2$ und ω^2 auf. Es ist

$$\frac{\partial \log\left(\frac{x_{\alpha\beta}}{(x-y)^2}\right)}{\partial x} = -\frac{A_{\alpha\beta}}{(x-y)\,x_{\alpha\beta}},$$

$$A_{\alpha\beta} = (x-c_\alpha)(y-c_\beta) + (y-c_\alpha)(x-c_\beta);$$

$$\frac{\partial \log\left(\frac{1}{\omega^2}\right)}{\partial x} = -\frac{\lambda\sqrt{\frac{y}{x}}}{\omega}, \qquad \frac{\partial \log\left(\frac{x}{\omega^2}\right)}{\partial x} = \frac{\varkappa}{x\,\omega}.$$

Daher:

$$\frac{\partial \log\left(\frac{x_{12}}{N^2}\right)}{\partial x} = -\frac{A_{12}}{(x-y)\,x_{12}} - \frac{\lambda\sqrt{\frac{y}{x}}}{\omega},$$

$$\partial \log\left(\frac{x\,x_{34}}{N^2}\right) = -\frac{A_{34}}{(x-y)\,x_{34}} + \frac{\varkappa}{x\,\omega}.$$

Wenn man nun

$$-\frac{A_{12}\sqrt{x\,y\,\omega}}{x-y} - \lambda\,y\,x_{12} = \Phi,$$

$$-\frac{A_{34}\,x\,\omega}{x-y} + \varkappa\,x_{34} = \Psi$$

setzt, so ist:

$$\frac{\partial \log\left(\frac{x_{12}}{N^2}\right)}{\partial x} = \frac{\Phi}{x_{12}\sqrt{x\,y\,\omega}}, \qquad \frac{\partial \log\left(\frac{x\,x_{34}}{N^2}\right)}{\partial x} = \frac{\Psi}{x\,x_{34}\,\omega},$$

und daher, da $(x-y)\,\omega = N$ ist:

$$\frac{2\sqrt{R(x)}}{x-y}\,\frac{\partial E_{12}}{\partial x} = \frac{\Phi\sqrt{x_{34}\,y_{34}} + \Psi\sqrt{x_{12}\,y_{12}}}{N^2}.$$

Denkt man sich neben Φ und Ψ die Funktionen Φ', Ψ' aufgestellt, die aus Φ, Ψ hervorgehen, indem man x mit y vertauscht — wir brauchen sie nicht hinzuschreiben; A_{12} und A_{34} bleiben bei dieser Vertauschung ungeändert, ebenso ω — so hat man auch:

$$\frac{2\sqrt{R(y)}}{x-y}\,\frac{\partial E_{12}}{\partial y} = \frac{\Phi'\sqrt{x_{34}\,y_{34}} + \Psi'\sqrt{x_{12}\,y_{12}}}{N^2}.$$

Denn E_{12} geht bei dieser Vertauschung in $-E_{12}$ über. Folglich ist:

$$E'_{12} = -\frac{(y\Phi + x\Phi')\sqrt{x_{34}\,y_{34}} + (y\Psi + x\Psi')\sqrt{x_{12}\,y_{12}}}{N^2},$$

$$E''_{12} = \frac{(\Phi + \Phi')\sqrt{x_{34}\,y_{34}} + (\Psi + \Psi')\sqrt{x_{12}\,y_{12}}}{N^2}.$$

Die Faktoren von $\sqrt{x_{34}\,y_{34}}$ und $\sqrt{x_{12}\,y_{12}}$ sind, wie aus den Ausdrücken von Φ und Ψ hervorgeht:

$$
\begin{aligned}
y\Phi + x\Phi' &= A_{12}\omega\sqrt{xy} - \lambda(y^2 x_{12} + x^2 y_{12}),\\
y\Psi + x\Psi' &= \varkappa(y x_{34} + x y_{34}),\\
\Phi + \Phi' &= -\lambda(y x_{12} + x y_{12}),\\
\Psi + \Psi' &= -A_{34}\omega + \varkappa(x_{34} + y_{34}).
\end{aligned}
$$

Sie müssen umgeformt werden. Erstens ist ω durch $\varkappa + \lambda\sqrt{xy}$ zu ersetzen, so daß auf der rechten Seite lineare Funktionen von $\varkappa$, λ stehen. Dann ist neben $A_{\alpha\beta}$ die Funktion

$$y x_{\alpha\beta} + x y_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}$$

einzuführen. Drittens ist zu bemerken, daß der Faktor von $\varkappa$ in der letzten Gleichung, und der von λ in der ersten,

$$
\begin{aligned}
-A_{34} + x_{34} + y_{34} &= (x-y)^2,\\
xy\,A_{12} - y^2 x_{12} - x^2 y_{12} &= -c_1 c_2 (x-y)^2
\end{aligned}
$$

ist [1]). Dadurch gehen die vier Gleichungen über in:

$$
\begin{aligned}
y\Phi + x\Phi' &= \varkappa A_{12}\sqrt{xy} - \lambda c_1 c_2 (x-y)^2,\\
y\Psi + x\Psi' &= \varkappa B_{34},\\
\Phi + \Phi' &= -\lambda B_{12},\\
\Psi + \Psi' &= \varkappa(x-y)^2 - \lambda A_{34}\sqrt{xy}.
\end{aligned}
$$

Wir setzen dies ein in die Ausdrücke von E'_{12} und E''_{12}. Dadurch entsteht:

$$E'_{12} = \frac{(-\varkappa A_{12}\sqrt{xy} + \lambda c_1 c_2 (x-y)^2)\sqrt{x_{34}y_{34}} - \varkappa B_{34}\sqrt{x_{12}y_{12}}}{N^2},$$

$$E''_{12} = \frac{-\lambda B_{12}\sqrt{x_{34}y_{34}} + (\varkappa(x-y)^2 - \lambda A_{34}\sqrt{xy})\sqrt{x_{12}y_{12}}}{N^2},$$

und wenn wir dies ordnen:

$$E'_{12} = \varkappa\,\frac{-A_{12}\sqrt{xy\,x_{34}y_{34}} - B_{34}\sqrt{x_{12}y_{12}}}{N^2} + \lambda c_1 c_2\,\frac{(x-y)^2\sqrt{x_{34}y_{34}}}{N^2},$$

$$E''_{12} = \varkappa\,\frac{(x-y)^2\sqrt{x_{12}y_{12}}}{N^2} + \lambda\,\frac{-A_{34}\sqrt{xy\,x_{12}y_{12}} - B_{12}\sqrt{x_{34}y_{34}}}{N^2}.$$

Wir setzen:

$$\frac{-A_{12}\sqrt{xy\,x_{34}y_{34}} - B_{34}\sqrt{x_{12}y_{12}}}{N^2} = K_{12}, \qquad \frac{(x-y)^2\sqrt{x_{12}y_{12}}}{N^2} = L_{12}$$

und lassen diese beiden Gleichungen auch bei allen Vertauschungen der vier Zahlen gelten. Dann ist

---

[1]) Beide Formeln sind leicht zu beweisen. Man gehe von der Gleichung aus:

$$-(x-c_3)(y-c_4) + (x-c_3)(x-c_4) = (x-c_3)(x-y),$$

vertausche in ihr x mit y und addiere. Dadurch entsteht die erste Formel. Ebenso entsteht die zweite, indem man von der Gleichung ausgeht:

$$xy(x-c_1)(y-c_2) - y^2(x-c_1)(x-c_2) = y(x-c_1)c_2(y-x)$$

und auch wieder x mit y vertauscht und addiert.

$$E'_{12} = \varkappa K_{12} + \lambda c_1 c_2 L_{34} ,$$
$$E''_{12} = \varkappa L_{12} + \lambda K_{34} .$$

Da man, wegen der vollständigen Symmetrie der Voraussetzungen, in diesen beiden Formeln die Zahlen 1, 2, 3, 4 beliebig untereinander vertauschen kann, so sind hierdurch die Ableitungen $E'_{\alpha\beta}, E''_{\alpha\beta}$ aller Komponenten $E_{\alpha\beta}$ algebraisch durch x und y ausgedrückt. Die Zähler von $K_{\alpha\beta}$ und $L_{\alpha\beta}$ sind unabhängig von $\varkappa$ und λ, der gemeinsame Nenner nicht; es ist $N^2 = (x-y)^2 (\varkappa + \lambda \sqrt{xy})^2$. Die Größen $E'_{\alpha\beta}, E''_{\alpha\beta}$ sind also in bezug auf $\varkappa$ und λ homogene Funktionen von der Dimension -1.

Wir brauchen die algebraischen Werte von K_{12} und L_{12} nur dazu, um den beiden Gleichungen $E'_{12} = \varkappa K_{12} + \lambda c_1 c_2 L_{34}$, $E''_{12} = \varkappa L_{12} + \lambda K_{34}$ eine dritte, ebenso einfache:

$$E_{12} E_{23} = - K_{12} - c_3 L_{12}$$

hinzuzufügen. Um diese zu beweisen, führen wir in der Gleichung

$$N^2 E_{13} E_{23} = (\sqrt{x_{13} y y_{24}} + \sqrt{y_{13} x x_{24}}) (\sqrt{x_{23} y y_{14}} + \sqrt{y_{23} x x_{14}})$$

die Multiplikation aus. Wir bekommen dann auf der rechten Seite die Summe:

$$(y(x-c_3)(y-c_4) + x(y-c_3)(x-c_4)) \sqrt{x_{12} y_{12}}$$
$$+ ((x-c_1)(y-c_2) + (y-c_1)(x-c_2)) \sqrt{xy x_{34} y_{34}} .$$

Der Faktor von $\sqrt{xy x_{34} y_{34}}$ ist A_{12}, und der von $\sqrt{x_{12} y_{12}}$, wie man leicht sieht: $B_{34} - c_3 (x-y)^2$. Es ist daher:

$$N^2 E_{13} E_{23} = (B_{34} - c_3 (x-y)^2) \sqrt{x_{12} y_{12}} + A_{12} \sqrt{xy x_{34} y_{34}} .$$

Dies gibt, den Ausdrücken von K_{12} und L_{12} zufolge: $E_{13} E_{23} = - K_{12} - c_3 L_{12}$, was zu beweisen war.

Die drei Gleichungen

$$E'_{12} = \varkappa K_{12} + \lambda c_1 c_2 L_{34} ,$$
$$E''_{12} = \varkappa L_{12} + \lambda K_{34} ,$$
$$E_{13} E_{23} = - K_{12} - c_3 L_{12} ,$$

in denen die Zahlen 1, 2, 3, 4 beliebig untereinander vertauscht werden dürfen, liefern durch Elimination der $K_{\alpha\beta}$ und der $L_{\alpha\beta}$, die zwölf partiellen Differentialgleichungen der Funktionen $E_{\alpha\beta}$. Diese sind nicht ganz einfach, es handelt sich dabei um viergliedrige Summen.

Zunächst machen wir eine einfache Bemerkung. Da die Gleichungen Identitäten sind, so kann man in ihnen $\lambda = 0$, $\varkappa = 1$, oder auch $\varkappa = 0$, $\lambda = 1$ setzen.

Ist $\lambda = 0$, $\varkappa = 1$, so ist $\omega = 1$ und $E_{\alpha\beta}$ die Funktion $S_{\alpha\beta}$. Die Gleichungen zeigen, daß in diesem Falle K_{12} mit E'_{12}, also mit S'_{12} identisch ist. Ebenso ist $L_{12} = S''_{12}$. Die dritte Gleichung gibt dann, da man die vier Zahlen untereinander vertauschen darf, in der Formel

$$S_{13} S_{23} = - \frac{\partial S_{12}}{\partial u} - c_3 \frac{\partial S_{12}}{\partial v} ,$$

das vollständige System der zwölf partiellen Differentialgleichungen, denen die sechs Funktionen $S_{\alpha\beta}$ genügen.

Ist $\lambda = 1, \varkappa = 0$, so ist $\omega = \sqrt{xy}$, $E_{\alpha\beta}$ die Funktion $T_{\alpha\beta}$. Aus den beiden ersten Formeln geht dann hervor, daß

$$E'_{12} = c_1 c_2 L_{34},\ E''_{12} = K_{34}$$

ist — also mit Vertauschung der vier Zahlen:

$$L_{12} = \frac{1}{c_3 c_4} \frac{\partial E_{34}}{\partial u},\quad K_{12} = \frac{\partial E_{34}}{\partial v}$$

ist. Die dritte Gleichung liefert dann, in der Formel:

$$T_{13}\, T_{23} = -\frac{\partial T_{34}}{\partial v} - \frac{1}{c_4} \frac{\partial T_{34}}{\partial u},$$

die zwölf Differentialgleichungen der Größen $T_{\alpha\beta}$.

Wenn man diese einfachen Gleichungen als bekannt ansieht, oder als leichte Folgerungen aus bekannten, so ist dagegen durchaus keine Einwendung zu machen; aber sie bestätigen die Richtigkeit der hier für die $E_{\alpha\beta}$ durchgeführten Rechnung.

Fügt man den Gleichungen

$$E'_{12} = \varkappa K_{12} + \lambda c_1 c_2 L_{34},$$
$$E''_{12} = \varkappa L_{12} + \lambda K_{34}$$

die beiden anderen hinzu:

$$E'_{34} = \varkappa K_{34} + \lambda c_3 c_4 L_{12},$$
$$E''_{34} = \varkappa L_{34} + \lambda K_{12},$$

die aus ihnen durch die Vertauschung des Zahlenpaares 1, 2 mit 3, 4 entstehen, so kann man K_{12} als lineare Funktion von E'_{12} und E''_{34}, L_{12} als solche von E''_{12} und E'_{34} darstellen. Die Auflösung ergibt:

$$K_{12} = \frac{\varkappa E'_{12} - \lambda c_1 c_2 E''_{34}}{\varkappa^2 - \lambda^2 c_1 c_2},$$
$$L_{12} = \frac{\varkappa E''_{12} - \lambda E'_{34}}{\varkappa^2 - \lambda^2 c_3 c_4},$$

und, durch Vertauschung von 1, 2 mit 3, 4:

$$K_{34} = \frac{\varkappa E'_{34} - \lambda c_3 c_4 E''_{12}}{\varkappa^2 - \lambda^2 c_3 c_4},$$
$$L_{34} = \frac{\varkappa E''_{34} - \lambda E'_{12}}{\varkappa^2 - \lambda^2 c_1 c_2}.$$

Ferner ist:

$$E_{13} E_{23} = -K_{12} - c_3 L_{12},\quad E_{14} E_{24} = -K_{12} - c_4 L_{12},$$
$$E_{13} E_{14} = -K_{34} - c_1 L_{34},\quad E_{23} E_{24} = -K_{34} - c_2 L_{34}.$$

Wenn man in einer der vier letzten Formeln die hier aufgestellten Werte von K_{12}, L_{12} oder von K_{34}, L_{34} einführt, so hat man eine der zwölf Differentialgleichungen der Funktionen $E_{\alpha\beta}$. Aus der einen entspringen die anderen, indem man die Zahlen 1, 2, 3, 4 untereinander vertauscht.

§ 3.

Es werde gesetzt:

$$\lambda = 1\,, \qquad c_1 c_2 c_3 = c_4\,, \qquad \varkappa^2 = c_4 \xi\,.$$

Durch die erste Gleichung wird:

$$\omega = \varkappa + \sqrt{xy}\,.$$

Durch die zweite werden die vier Größen c_1, c_2, c_3, c_4 beschränkt; nur c_1, c_2, c_3 bleiben willkürlich.

Durch die dritte wird neben c_1, c_2, c_3 ein vierter Parameter ξ eingeführt, an Stelle der Größe $\varkappa$, die nicht ganz ausfällt, aber zurücktritt. ξ möge als veränderlich gelten, c_1, c_2, c_3 als konstant.

Hierdurch wird die vollständige Symmetrie in bezug auf alle vier Zahlen 1, 2, 3, 4 aufgegeben, nur die drei ersten bleiben vertauschbar. Die Ausdrücke von K_{12}, L_{12}, K_{34}, L_{34} durch die Ableitungen E'_{12}, E''_{12}, E'_{34}, E''_{34} gehen über in:

$$K_{12} = \frac{\varkappa E'_{12} - c_1 c_2 E''_{34}}{c_1 c_2 (c_3 \xi - 1)}\,,$$

$$L_{12} = \frac{\varkappa E''_{12} - E'_{34}}{c_4 (\xi - c_3)}\,,$$

$$K_{34} = \frac{\varkappa E'_{34} - c_3 c_4 E''_{12}}{c_4 (\xi - c_3)}\,,$$

$$L_{34} = \frac{\varkappa E''_{34} - E'_{12}}{c_1 c_2 (c_3 \xi - 1)}\,.$$

Die beiden letzten Gleichungen multiplizieren wir mit $\varkappa$ und ersetzen $\varkappa^2$ durch $c_4 \xi$. Sie gehen dadurch über in:

$$\varkappa K_{34} = \frac{\xi E'_{34} - c_3 \varkappa E''_{12}}{\xi - c_3}\,,$$

$$\varkappa L_{34} = \frac{c_4 \xi E''_{34} - \varkappa E'_{12}}{c_1 c_2 (c_3 \xi - 1)}\,.$$

Die vier Größen K_{12}, L_{12}, $\varkappa K_{34}$, $\varkappa L_{34}$ sind lineare Funktionen der vier anderen: E'_{34}, E''_{34}, $\varkappa E'_{12}$, $\varkappa E''_{12}$, in deren Koeffizienten die Größe $\varkappa$ nicht vorkommt.

Wir führen die beiden Funktionen von ξ ein:

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{\xi} - \xi\,, \qquad \varrho = \frac{1}{\xi} + \xi\,,$$

und die Werte ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, die ϱ für $\xi = c_1, c_2, c_3$ annimmt:

$$\varrho_1 = \frac{1}{c_1} + c_1 \qquad \text{usf.}$$

Es ist dann:

$$\varrho - \varrho_1 = \frac{(\xi - c_1)(c_1 \xi - 1)}{c_1 \xi}\,,$$

$$\varkappa^2 (\varrho - \varrho_1) = c_2 c_3 (\xi - c_1)(c_1 \xi - 1) \qquad \text{usf.}$$

Ferner:

$$\varrho_1 - \varrho_2 = \frac{(c_1 - c_2)(c_1 c_2 - 1)}{c_1 c_2}, \qquad \varrho_1 + \varrho_2 = \frac{(c_1 + c_2)(c_1 c_2 + 1)}{c_1 c_2}.$$

$$\varrho_1 \varrho_2 + 4 = \frac{(c_1 + c_2)^2 + (c_1 c_2 + 1)^2}{c_1 c_2}.$$

Da $c_1 c_2 c_3 = c_4$ ist, kann man diesen Gleichungen noch hinzufügen:

$$(c_1 - c_2)(c_3 - c_4) = c_4(\varrho_2 - \varrho_1).$$

In allen, und auch in den folgenden, darf man die Zahlen 1, 2, 3 untereinander vertauschen.

Außer den rationalen Funktionen ϱ und $\mathfrak{W}$ brauchen wir drei irrationale: m_1, m_2, m_3, deren Produkt aber rational ist. Sie sind bestimmt durch die drei Gleichungen:

$$m_1 = \sqrt{\varrho - \varrho_2}\sqrt{\varrho - \varrho_3} \quad \text{usf.}$$

Es ist also:

$$m_1 m_2 = (\varrho - \varrho_3) m_3 \quad \text{usf.}$$

Da $m_3^2 = (\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2)$, $\mathfrak{W}^2 = \varrho^2 - 4$ ist, so ist $\mathfrak{W}^2 - m_3^2$ eine lineare Funktion von ϱ:

$$\mathfrak{W}^2 - m_3^2 = \varrho(\varrho_1 + \varrho_2) - \varrho_1 \varrho_2 - 4.$$

Für $\varrho_1 + \varrho_2$ und $\varrho_1 \varrho_2 + 4$ setzen wir die angegebenen Werte ein, und für ϱ: $\frac{1}{\xi} + \xi$. Dadurch wird $\mathfrak{W}^2 - m_3^2$ eine quadratische Funktion von ξ, mit dem Nenner ξ:

$$\mathfrak{W}^2 - m_3^2 = \frac{\left(\frac{1}{\xi} + \xi\right)(c_1 + c_2)(c_1 c_2 + 1) - (c_1 + c_2)^2 - (c_1 c_2 + 1)^2}{c_1 c_2}.$$

Sie zerfällt in zwei Faktoren. Der eine ist:

$$1 + c_1 c_2 - (c_1 + c_2)\xi = r_3,$$

der andere ist eine lineare Funktion von $\frac{1}{\xi}$:

$$\frac{c_1 + c_2 - (1 + c_1 c_2)\xi}{c_1 c_2 \xi} = s_3.$$

Wir führen auch r_1, s_1; r_2, s_2 ein, durch Vertauschung der Zahl 3 mit 1 und mit 2. Wir haben dann die drei Gleichungen:

$$\mathfrak{W}^2 - m_1^2 = r_1 s_1 \quad \text{usf.}$$

Wenn man von r_3 die Größe $\xi\mathfrak{W} = 1 - \xi^2$ abzieht, erhält man: $(\xi - c_1)(\xi - c_2)$. Zieht man dagegen $c_1 c_2 \xi \mathfrak{W}$ ab, so entsteht das Produkt $(c_1\xi - 1)(c_2\xi - 1)$. Zu diesen Formeln:

$$r_3 - \xi\mathfrak{W} = (\xi - c_1)(\xi - c_2), \quad r_3 - c_1 c_2 \xi \mathfrak{W} = (c_1\xi - 1)(c_2\xi - 1),$$

die sich mit den aus ihnen durch Vertauschung der drei Zahlen hervorgehenden leicht behalten lassen, kommt eine dritte hinzu; es ist:

$$\xi(c_1\mathfrak{W} - r_3) = (\xi - c_1)(c_2\xi - 1);$$

der Koeffizient c_1 von $\mathfrak{W}$ entspricht auf der anderen Seite der Gleichung dem Faktor $\xi - c_1$, und nicht dem andern $c_2\xi - 1$.

Auch die Richtigkeit dieser dritten Formel, die bei der Vertauschbarkeit der drei Zahlen eigentlich sechs darstellt, ist leicht zu erkennen. Es ist

$$\frac{(\xi - c_1)(c_2\,\xi - 1)}{\xi} = c_2\,\xi + \frac{c_1}{\xi} - 1 - c_1\,c_2\,.$$

$\frac{c_1}{\xi}$ kann durch $c_1\,\xi + c_1\,\mathfrak{W}$ ersetzt werden, und so kommt die dritte Formel heraus.

Mit den Komponenten $E_{\alpha\beta}$ nehmen wir eine ganz spezielle Transformation vor, bei der je zwei sich gegenüberstehende Komponenten, z. B. E_{14} und E_{23}, durch zwei lineare Funktionen von ihnen ersetzt werden. Die neuen Komponenten mögen mit $Q_{\alpha\beta}$ bezeichnet werden. Und zwar soll

$$Q_{14} = r_1 E_{14} + (\mathfrak{W} + m_1)\varkappa E_{23}\,,$$
$$Q_{23} = r_1 E_{14} + (\mathfrak{W} - m_1)\varkappa E_{23}$$

sein; die Werte von Q_{24}, Q_{13}; Q_{34}, Q_{12} sind die, die sich ergeben, wenn man in diesen beiden Gleichungen die Zahlen 1, 2, 3 untereinander vertauscht [1]).

Hier ist jedem Paare sich gegenüberstehender Komponenten eine der Größen m_1, m_2, m_3 zugeordnet, und die beiden Komponenten des Paares sind zugleich in bezug auf das zugehörige m_α konjugierte Größen.

Wir bilden das Produkt $Q_{14}\,Q_{24}$. Dies ist:

$$(r_1 E_{14} + (\mathfrak{W} + m_1)\varkappa E_{23})(r_2 E_{24} + (\mathfrak{W} + m_2)\varkappa E_{13});$$

es läßt sich, da $m_1\,m_2 = (\varrho - \varrho_3)\,m_3$ ist, in eine lineare Funktion von m_1, m_2, m_3 entwickeln, mit Koeffizienten, die Funktionen von u, v sind, und zwar solche, die die drei Wurzelgrößen nicht enthalten.

Danach läßt sich $Q_{14}\,Q_{24}$ in eine viergliedrige Summe entwickeln:

$$Q_{14}\,Q_{24} = R_3 + R_{3,1} + R_{3,2} + R_{3,3}\,,$$

deren Glieder $R_{3,1}$ durch m_1, $R_{3,2}$ durch m_2, $R_{3,3}$ durch m_3 teilbar sind, während R_3 diese Wurzelgrößen nicht enthält. Es ist:

$$\frac{R_{3,1}}{m_1} = \varkappa r_2 E_{23} E_{24} + \varkappa^2 \mathfrak{W} E_{13} E_{23}\,,$$
$$\frac{R_{3,2}}{m_2} = \varkappa r_1 E_{13} E_{14} + \varkappa^2 \mathfrak{W} E_{13} E_{23}\,,$$
$$\frac{R_{3,3}}{m_3} = \varkappa^2 (\varrho - \varrho_3) E_{13} E_{23}\,,$$
$$R_3 = r_1 r_2 E_{14} E_{24} + \varkappa^2 \mathfrak{W}^2 E_{13} E_{23} + \varkappa \mathfrak{W}(r_1 E_{13} E_{14} + r_2 E_{23} E_{24}).$$

Die zweite Gleichung entsteht aus der ersten durch Vertauschung von 1 mit 2; die dritte läßt sich, da $\varkappa^2(\varrho - \varrho_3) = c_1\,c_2(\xi - c_3)\,(\varrho_3\,\xi - 1)$ ist, so schreiben:

$$\frac{R_{3,3}}{m_3} = c_1\,c_2(\xi - c_3)(c_3\,\xi - 1)\,E_{13}\,E_{23}\,.$$

---

[1]) Nahe gelegt werden diese Formen durch die frühere Arbeit des Verfassers: Über die analytische Aufgabe der Bewegung eines starren Körpers im vierdimensionalen Raume. Sitz.-Ber. d. Ak. d. W., 17. 6. 1926.

Auch in den anderen ist $\varkappa^2$ durch $c_4\xi$ oder $c_1c_2c_3\xi$ zu ersetzen.

Die auftretenden Produkte benachbarter E-Funktionen können linear durch die Hilfsgrößen K_{12}, L_{12}, K_{34}, L_{34} ausgedrückt werden und diese durch E'_{12}, E''_{12}, E'_{34}, E''_{34}. Dabei sind die bisherigen Bezeichnungen der Funktionen unbequem, wir ersetzen sie durch folgende:

$$K_{12} = A, \quad L_{12} = B, \quad \varkappa K_{34} = C, \quad \varkappa L_{34} = D;$$
$$E'_{34} = X, \quad E''_{34} = Y, \quad \varkappa E'_{12} = Z, \quad \varkappa E''_{12} = U.$$

Eigentlich müßten alle acht Größen den Index 3 bekommen; man kann sich ihn hinzudenken.

Zwischen A, B, C, D und X, Y, Z, U bestehen dann die Gleichungen:

$$A = \frac{Z - c_1c_2Y}{c_1c_2(c_3\xi - 1)}, \qquad B = \frac{U - X}{c_4(\xi - c_3)},$$
$$C = \frac{\xi X - c_3 U}{\xi - c_3}, \qquad D = \frac{c_4\xi Y - Z}{c_1c_2(c_3\xi - 1)}.$$

Die Formeln

$$E_{13}E_{23} = -K_{12} - c_3L_{12}, \quad E_{14}E_{24} = -K_{12} - c_4L_{12},$$
$$E_{13}E_{14} = -K_{34} - c_1L_{34}, \quad E_{23}E_{24} = -K_{34} - c_2L_{34}$$

werden durch folgende ersetzt:

$$E_{13}E_{23} = -A - c_3B, \quad E_{14}E_{24} = -A - c_4B,$$
$$\varkappa E_{13}E_{14} = -C - c_1D, \quad \varkappa E_{23}E_{24} = -C - c_2D.$$

So bekommt man zunächst, da $\varkappa^2 = c_4\xi$ ist:

$$\frac{R_{3,1}}{m_1} = -r_2(C + c_2D) - c_4\xi\mathfrak{W}(A + c_3B),$$
$$\frac{R_{3,3}}{m_3} = -c_1c_2(\xi - c_3)(c_3\xi - 1)(A + c_3B),$$
$$R_3 = -r_1r_2(A + c_4B) - c_4\xi\mathfrak{W}^2(A + c_3B) - \mathfrak{W}r_1(C + c_1D) - \mathfrak{W}r_2(C + c_2D).$$

In der letzten Gleichung vereinigen wir die zusammengehörigen Glieder; es ist:

$$R_3 = -(r_1r_2 + c_4\xi\mathfrak{W}^2)A - \mathfrak{W}(c_1r_1 + c_2r_2)D$$
$$- c_4(r_1r_2 + c_3\xi\mathfrak{W}^2)B - \mathfrak{W}(r_1 + r_2)C.$$

Wir entwickeln zuerst $R_{3,1}$. Es ist

$$\frac{R_{3,1}}{m_1} = r_2\frac{c_3U - \xi X}{\xi - c_3} + r_2\frac{Z - c_4\xi Y}{c_1(c_3\xi - 1)} + c_3\xi\mathfrak{W}\frac{c_1c_2Y - Z}{c_3\xi - 1} + c_3\xi\mathfrak{W}\frac{X - U}{\xi - c_3}.$$

Wenn man dies ordnet, erhält man:

$$\frac{R_{3,1}}{m_1} = X\frac{\xi(c_3\mathfrak{W} - r_2)}{\xi - c_3} + Y\frac{c_2c_3\xi(c_1\mathfrak{W} - r_2)}{c_3\xi - 1}$$
$$+ Z\frac{r_2 - c_1c_3\xi\mathfrak{W}}{c_1(c_3\xi - 1)} + U\frac{c_3(r_2 - \xi\mathfrak{W})}{\xi - c_3},$$

und, den Hilfsformeln zufolge:

$$\frac{R_{3,1}}{m_1} = X(c_1\xi - 1) + Y c_2 c_3(\xi - c_1) + Z\frac{c_1\xi - 1}{c_1} + U c_3(\xi - c_1).$$

Wir führen drei Größenpaare: $f_1, g_1,$; f_2, g_2; f_3, g_3 ein, die die irrationalen Faktoren m_1, m_2, m_3 enthalten:

$$f_1 = (c_1\xi - 1)m_1, \quad g_1 = c_2 c_3(\xi - c_1)m_1 \quad \text{usf.}$$

Dann ist:

$$R_{3,1} = f_1 X + g_1 Y + \frac{f_1}{c_1} Z + \frac{g_1}{c_2} U.$$

Entsprechend, durch Vertauschung von 1 mit 2:

$$R_{3,2} = f_2 X + g_2 Y + \frac{f_2}{c_2} Z + \frac{g_2}{c_1} U.$$

Daher:

$$R_{3,1} + R_{3,2} = (f_1 + f_2)X + (g_1 + g_2)Y + \Big(\frac{f_1}{c_1} + \frac{f_2}{c_2}\Big) Z + \Big(\frac{g_1}{c_2} + \frac{g_2}{c_1}\Big) U.$$

Hier ist:

$$\frac{f_1}{c_1} + \frac{f_2}{c_2} = \frac{\mathfrak{W} - m_3}{r_3}(f_1 + f_2), \quad \frac{g_1}{c_2} + \frac{g_2}{c_1} = \frac{\mathfrak{W} - m_3}{r_3}(g_1 + g_2).$$

Denn es ist:

$$\frac{m_3 f_1}{f_2} = \frac{c_1\xi - 1}{c_2\xi - 1}\frac{m_1 m_3}{m_2}; \quad = \frac{c_1\xi - 1}{c_2\xi - 1}(\varrho - \varrho_2)$$
$$= \frac{(c_1\xi - 1)(\xi - c_2)}{c_2\xi}; \quad = \frac{c_2\mathfrak{W} - r_3}{c_2}.$$

Ebenso:

$$\frac{m_3 g_1}{g_2} = \frac{c_2(\xi - c_1)}{c_1(\xi - c_2)}\frac{m_1 m_3}{m_2}; \quad = \frac{c_2(\xi - c_1)}{c_1(\xi - c_2)}(\varrho - \varrho_2)$$
$$= \frac{(\xi - c_1)(c_2\xi - 1)}{c_1\xi}; \quad = \frac{c_1\mathfrak{W} - r_3}{c_1}.$$

Daher:

$$m_3 f_1 = \Big(\mathfrak{W} - \frac{r_3}{c_2}\Big) f_2, \quad m_3 g_1 = \Big(\mathfrak{W} - \frac{r_3}{c_1}\Big) g_2,$$

$$m_3 f_2 = \Big(\mathfrak{W} - \frac{r_3}{c_1}\Big) f_1, \quad m_3 g_2 = \Big(\mathfrak{W} - \frac{r_3}{c_2}\Big) g_1.$$

Folglich:

$$m_3(f_1 + f_2) = \mathfrak{W}(f_1 + f_2) - r_3\Big(\frac{f_1}{c_1} + \frac{f_2}{c_2}\Big),$$

$$m_3(g_1 + g_2) = \mathfrak{W}(g_1 + g_2) - r_3\Big(\frac{g_1}{c_2} + \frac{g_2}{c_1}\Big).$$

Damit sind beide Formeln bewiesen. Demnach ist:

$$R_{3,1} + R_{3,2} = (f_1 + f_2)\Big(X + \frac{\mathfrak{W} - m_3}{r_3} Z\Big) + (g_1 + g_2)\Big(Y + \frac{\mathfrak{W} - m_3}{r_3} U\Big),$$

und da

$$X = \frac{\partial E_{34}}{\partial u}, \quad Z = \varkappa \frac{\partial E_{12}}{\partial u}, \quad Y = \frac{\partial E_{34}}{\partial v}, \quad U = \varkappa \frac{\partial E_{12}}{\partial v}$$

ist, $r_3 E_{34} + (\mathfrak{W} - m_3)\varkappa E_{12} = Q_{12}$, so folgt:

$$r_3(R_{3,1} + R_{3,2}) = (f_1 + f_2)\frac{\partial Q_{12}}{\partial u} + (g_1 + g_2)\frac{\partial Q_{12}}{\partial v}.$$

$R_{3,3}$ ist, wenn man für A und B ihre Werte einsetzt, als lineare Funktion von X, Y, Z, U unmittelbar gegeben. Es ist:

$$\frac{R_{3,3}}{m_3} = c_1 c_2(\xi - c_3)(c_3\xi - 1)\left\{\frac{c_1 c_2 Y - Z}{c_1 c_2(c_3\xi - 1)} + \frac{X - U}{c_1 c_2(\xi - c_3)}\right\};$$

also:

$$\frac{R_{3,3}}{m_3} = (\xi - c_3)(c_1 c_2 Y - Z) + (c_3\xi - 1)(X - U).$$

Hier zeigt sich, daß die beiden Anfangsglieder von $R_{3,3}$ denen von $R_{3,1}$ und $R_{3,2}$ genau entsprechen; es ist:

$$R_{3,3} = f_3 X + g_3 Y - (\xi - c_3) m_3 Z - (c_3\xi - 1) m_3 U.$$

Weniger leicht ist es, die vier Koeffizienten der Linearform R_3 in geeigneter Form darzustellen. A und D sind als lineare Funktionen von Y und Z, B und C als solche von X und U gegeben. Setzt man sie ein, so ist ein Teil von R_3:

$$\frac{(r_1 r_2 + c_4\xi\mathfrak{W}^2)(c_1 c_2 Y - Z) + \mathfrak{W}(c_1 r_1 + c_2 r_2)(Z - c_1\xi Y)}{c_1 c_2(c_3\xi - 1)}.$$

Der Rest ist:

$$\frac{(r_1 r_2 + c_3\xi\mathfrak{W}^2)(X - U) + \mathfrak{W}(r_1 + r_2)(c_3 U - \xi X)}{\xi - c_3}.$$

Daraus lassen sich die einzelnen Koeffizienten von X, Y, Z, U in der Form R_3 erkennen. Sie sind der Reihe nach:

$$\frac{r_1 r_2 + c_3\xi\mathfrak{W}^2 - (r_1 + r_2)\xi\mathfrak{W}}{\xi - c_3} = \frac{(r_1 - \xi\mathfrak{W})(r_2 - \xi\mathfrak{W})}{\xi - c_3} - \xi\mathfrak{W}^2,$$

$$\frac{r_1 r_2 - c_4\xi\mathfrak{W}^2 - c_3\xi\mathfrak{W}(c_1 r_1 + c_2 r_2)}{c_3\xi - 1} = \frac{(r_1 - c_2 c_3\xi\mathfrak{W})(r_2 - c_1 c_3\xi\mathfrak{W})}{c_3\xi - 1} - c_4\xi\mathfrak{W}^2,$$

$$-\frac{r_1 r_2 + c_4\xi\mathfrak{W}^2 - (c_1 r_1 + c_2 r_2)\mathfrak{W}}{c_1 c_2(c_3\xi - 1)} = -\frac{(c_2\mathfrak{W} - r_1)(c_1\mathfrak{W} - r_2)}{c_1 c_2(c_3\xi - 1)} - \mathfrak{W}^2,$$

$$-\frac{r_1 r_2 + c_3\xi\mathfrak{W}^2 - c_3(r_1 + r_2)\mathfrak{W}}{\xi - c_3} = -\frac{(c_3\mathfrak{W} - r_1)(c_3\mathfrak{W} - r_2)}{\xi - c_3} - c_3\mathfrak{W}^2.$$

Sie werden, wenn man die Hilfsformeln anwendet:

$$(\xi - c_1)(\xi - c_2)(\xi - c_3) - \xi\mathfrak{W}^2,$$

$$(c_1\xi - 1)(c_2\xi - 1)(c_3\xi - 1) - c_1 c_2 c_3\xi\mathfrak{W}^2,$$

$$-\frac{(\xi - c_1)(\xi - c_2)(c_3\xi - 1)}{c_1 c_2\xi^2} - \mathfrak{W}^2,$$

$$-\frac{(c_1\xi - 1)(c_2\xi - 1)(\xi - c_3)}{\xi^2} - c_3\mathfrak{W}^2.$$

Die Koeffizienten von X und Y, die bei den Vertauschungen der Zahlen 1, 2, 3 ungeändert bleiben, bezeichnen wir mit f und g:

$$(\xi - c_1)(\xi - c_2)(\xi - c_3) - \xi\,\mathfrak{W}^2 = f\,,$$
$$(c_1\xi - 1)(c_2\xi - 1)(c_3\xi - 1) - c_1c_2c_3\,\xi\,\mathfrak{W}^2 = g.$$

Aber diese, und auch die beiden andern, müssen noch weiter umgeformt werden. Wir ersetzen $\mathfrak{W}^2$ durch $\left(\frac{1}{\xi} - \xi\right)\mathfrak{W}$ und, in den Ausdrücken von f und g:

$(\xi - c_1)(\xi - c_2)$ durch $r_3 - \xi\,\mathfrak{W}$, $(c_1\xi - 1)(c_2\xi - 1)$ durch $r_3 - c_1c_2\,\xi\,\mathfrak{W}$.

Dadurch erhält man zunächst:

$$f = (\xi - c_3)(r_3 - \xi\,\mathfrak{W}) - (1 - \xi^2)\,\mathfrak{W}\,,$$
$$g = (c_3\xi - 1)(r_3 - c_1c_2\,\xi\,\mathfrak{W}) - c_1c_2c_3(1 - \xi^2)\mathfrak{W}\,.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die einfachen:

$$f = (\xi - c_3)r_3 + (c_3\xi - 1)\mathfrak{W}\,,$$
$$g = (c_3\xi - 1)r_3 + c_1c_2(\xi - c_3)\mathfrak{W}\,,$$

die natürlich richtig bleiben, wenn man die Zahlen 1, 2, 3 untereinander vertauscht.

Für die beiden anderen Koeffizienten, die von Z und U, ist es besser, in sie nicht die Größe r_3, sondern die andere:

$$s_3 = \frac{c_1 + c_2 - (1 + c_1c_2)\xi}{c_1c_2\,\xi}\,,$$

die mit r_3 durch die Gleichung $\mathfrak{W}^2 - m_3^2 = r_3s_3$ verbunden ist, einzuführen.

Für s_3 gelten die Formeln:

$$c_1c_2\,\xi(\xi s_3 - \mathfrak{W}) = -(\xi - c_1)(\xi - c_2)\,,$$
$$\xi(c_1c_2\,\xi s_3 - \mathfrak{W}) = -(c_1\xi - 1)(c_2\xi - 1)\,,$$

wie sich leicht ergibt, wenn man $\mathfrak{W}$ durch $\frac{1}{\xi} - \xi$ ersetzt. Dadurch wird der Koeffizient von Z:

$$(c_3\xi - 1)\left(s_3 - \frac{\mathfrak{W}}{\xi}\right) - \left(\frac{1}{\xi} - \xi\right)\mathfrak{W} = (c_3\xi - 1)s_3 + (\xi - c_3)\,\mathfrak{W}\,,$$

der von U:

$$(\xi - c_3)\left(c_1\,c_2\,s_3 - \frac{\mathfrak{W}}{\xi}\right) - c_3\left(\frac{1}{\xi} - \xi\right)\Big) = c_1c_2(\xi - c_3)s_3 + (c_3\xi - 1)\mathfrak{W}\,.$$

Die Koeffizienten von X, Y, Z, U in der Form R_3 sind also der Reihe nach:

$$f = (\xi - c_3)r_3 + (c_3\xi - 1)\mathfrak{W}\,,$$
$$g = (c_3\xi - 1)r_3 + c_1c_2(\xi - c_3)\mathfrak{W}\,,$$
$$(c_3\xi - 1)s_3 + (\xi - c_3)\mathfrak{W}\,,$$
$$c_1c_2(\xi - c_3)s_3 + (c_3\xi - 1)\mathfrak{W}\,.$$

In der Form $R_{3,3}$ sind sie:

$$f_3 = (c_3\xi - 1)m_3\,,\ g_3 = c_1c_2(\xi - c_3)m_3\,,$$
$$-(\xi - c_3)\,m_3\,,\ -(c_3\xi - 1)\,m_3\,.$$

In der Form $R_3 + R_{33}$ sind sie daher:

$$f + f_3 = (\xi - c_3) r_3 + (c_3 \xi - 1)(\mathfrak{W} + m_3),$$
$$g + g_3 = (c_3 \xi - 1) r_3 + c_1 c_2 (\xi - c_3)(\mathfrak{W} + m_3),$$
$$(c_3 \xi - 1) s_3 + (\xi - c_3)(\mathfrak{W} - m_3),$$
$$c_1 c_2 (\xi - c_3) s_3 + (c_3 \xi - 1)(\mathfrak{W} - m_3).$$

Da $r_3 s_3 = \mathfrak{W}^2 - m_3^2$ ist, so sieht man, daß die beiden letzten Koeffizienten das Produkt von $\frac{\mathfrak{W} - m_3}{r_3}$ mit den beiden ersten sind. Die vier Koeffizienten von $R_3 + R_{3,3}$ sind also:

$$f + f_3,\ g + g_3,\ \frac{\mathfrak{W} - m_3}{r_3}(f + f_3),\ \frac{\mathfrak{W} - m_3}{r_3}(g + g_3).$$

Daraus folgt die Gleichung:

$$r_3 (R_3 + R_{3,3}) = (f + f_3) \frac{\partial Q_{12}}{\partial u} + (g + g_3) \frac{\partial Q_{12}}{\partial v}.$$

Diese tritt zu der vorher abgeleiteten:

$$r_3 (R_{3,1} + R_{3,2}) = (f_1 + f_2) \frac{\partial Q_{12}}{\partial u} + (g_1 + g_2) \frac{\partial Q_{12}}{\partial v}$$

hinzu. Die Summe aller vier Größen $R_{3,1}, R_{3,2}, R_{3,3}, R_3$ ist gleich $Q_{14} Q_{24}$. Wir erhalten dadurch die Differentialgleichung

$$r_3 \mathfrak{A}_{14} \mathfrak{A}_{24} = F_4 \frac{\partial Q_{12}}{\partial u} + G_4 \frac{\partial Q_{12}}{\partial v},$$

deren Koeffizienten durch die Summen dargestellt werden:

$$F_4 = f + f_1 + f_2 + f_3,$$
$$G_4 = g + g_1 + g_2 + g_3.$$

§ 4.

Wir haben eine Differentialgleichung gefunden — von der man allerdings sagen kann, daß sie drei darstellt, mit denselben Koeffizienten F_4, G_4, da man die Zahlen 1, 2, 3 miteinander vertauschen darf. Die Gleichung ist eine Identität. Sie muß daher richtig bleiben, wenn man zwei der Größen m_1, m_2, m_3 durch die entgegengesetzten Werte ersetzt — die dritte bleibt dann ungeändert. Ersetzt man m_2, m_3 durch $-m_2, -m_3$, so gehen auch f_2, g_2 in die entgegengesetzten Werte über, weil sie den Faktor m_2 haben, und ebenso f_3, g_3; F_4 und G_4 verwandeln sich in

$$F_1 = f + f_1 - f_2 - f_3, \quad G_1 = g + g_1 - g_2 - g_3.$$

Die Komponente Q_{14}, deren Ausdruck die Wurzelgröße m_1 enthält, bleibt ungeändert, Q_{24} dagegen geht in die entgegengesetzte Q_{13} über, und Q_{12} in Q_{34}. Hiernach besteht die Gleichung

$$r_3 Q_{13} Q_{14} = F_1 \frac{\partial Q_{34}}{\partial u} + G_1 \frac{\partial Q_{34}}{\partial v}.$$

In derselben Weise wirkt die Vorzeichenänderung von m_3, m_1, und von m_1, m_2; man erhält vier Gleichungen:

$$r_3 Q_{14} Q_{24} = F_4 \frac{\partial Q_{12}}{\partial u} + G_4 \frac{\partial Q_{12}}{\partial v},$$
$$r_3 Q_{13} Q_{14} = F_1 \frac{\partial Q_{34}}{\partial u} + G_1 \frac{\partial Q_{34}}{\partial v},$$
$$r_3 Q_{23} Q_{24} = F_2 \frac{\partial Q_{34}}{\partial u} + G_2 \frac{\partial Q_{34}}{\partial v},$$
$$r_3 Q_{13} Q_{23} = F_3 \frac{\partial Q_{12}}{\partial u} + G_3 \frac{\partial Q_{12}}{\partial v},$$

in denen

$$F_4 = f + f_1 + f_2 + f_3,$$
$$F_1 = f + f_1 - f_2 - f_3,$$
$$F_2 = f - f_1 + f_2 - f_3,$$
$$F_3 = f - f_1 - f_2 + f_3$$

ist, und G_4, G_1, G_2, G_3 entsprechend definiert sind. Jede dieser Gleichungen bleibt richtig, wenn man die Zahlen 1, 2, 3 untereinander vertauscht. Die zwölf Gleichungen, die so entstehen, sagen aus, daß die Komponenten $Q_{\alpha\beta}$ die Eigenschaft der $S_{\alpha\beta}$ haben: Jedes Produkt zweier benachbarter ist linear in den zwei Ableitungen der ergänzenden.

Die Faktoren r_a, die in den zwölf Differentialgleichungen vorkommen, lassen sich entfernen, aber nur dadurch, daß man die Komponenten mit Wurzelgrößen multipliziert, die in ihrem Ausdruck nicht vorkommen. Ich setze:

$$\sqrt{r_2}\sqrt{r_3} Q_{14} = R_{14}, \quad \sqrt{r_2}\sqrt{r_3} Q_{23} = R_{23}$$

und ebenso:

$$\sqrt{r_3}\sqrt{r_1} Q_{24} = R_{24}, \quad \sqrt{r_3}\sqrt{r_1} Q_{13} = R_{13}$$

usf. Führt man diese Ausdrücke ein, nachdem man jede der vier Gleichungen mit $\sqrt{r_1}\sqrt{r_2}$ multipliziert hat, so erhält man für die $R_{\alpha\beta}$ vier Differentialgleichungen, die sich von denen für die $Q_{\alpha\beta}$ nur dadurch unterscheiden, daß der Faktor r_3 verschwunden ist. Damit ist die vollständige Symmetrie in bezug auf alle vier Zahlen wiederhergestellt; eine einzige Gleichung, z. B.

$$R_{13} R_{23} = F_3 \frac{\partial R_{12}}{\partial u} + G_3 \frac{\partial R_{12}}{\partial v},$$

genügt für das System aller zwölf, da die übrigen durch Vertauschung der Zahlen 1, 2, 3 untereinander und mit 4 gewonnen werden.

Von den Quotienten

$$\frac{F_1}{G_1}, \quad \frac{F_2}{F_2}, \quad \frac{F_3}{G_3}, \quad \frac{F_4}{G_4}$$

gilt der Satz:

Ihr Doppelverhältnis ist gleich dem der vier Größen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho$.

Zum Beweise untersuchen wir zuerst die sechs Determinanten

$$D_{\alpha\beta} = F_\alpha G_\beta - F_\beta G_\alpha,$$

was auch dann nötig wird, wenn man die algebraischen Gleichungen zwischen den Komponenten $R_{\alpha\beta}$ aufstellen will. Wir gehen dabei von dem Ausdruck aus:

$$\begin{vmatrix} f + \varepsilon f_1 - \varepsilon f_2 - f_3 & g + \varepsilon g_1 - \varepsilon g_2 - g_3 \\ f + \varepsilon f_1 + \varepsilon f_2 + f_3 & g + \varepsilon g_1 + \varepsilon g_2 + g_3 \end{vmatrix},$$

der $D_{1,4}$ darstellt für $\varepsilon = 1$, $D_{2,3}$ für $\varepsilon = -1$. Er ist das Doppelte von:

$$\begin{vmatrix} f + \varepsilon f_1 & g + \varepsilon g_1 \\ \varepsilon f_2 + f_3 & \varepsilon g_2 + g_3 \end{vmatrix};$$

er ist daher, für $\varepsilon^2 = 1$, gleich $2\,(A + B\varepsilon)$, wo A und B die beiden Ausdrücke sind:

$$A = f g_3 - g f_3 + f_1 g_2 - f_2 g_1,$$
$$B = f g_2 - g f_2 + f_1 g_3 - f_3 g_1.$$

Der zweite Ausdruck entspringt aus dem ersten, indem man die Zahl 2 mit 3 vertauscht. Deshalb ist nur der erste zu entwickeln. In diesem ist:

$$f g_3 - g f_3 = r_3 m_3 (c_1 c_2 (\xi - c_3)^2 - (c_3 \xi - 1)^2),$$
$$f_1 g_2 - f_2 g_1 = r_3 m_3 (c_2 - c_1)(\xi - c_3)(c_3 \xi - 1).$$

Die eine Formel ergibt sich daraus, daß

$$f = (\xi - c_3) r_3 + (c_3 \xi - 1)\,\mathfrak{W}, \qquad g_3 = c_1 c_2 (\xi - c_3) m_3,$$
$$g = (c_3 \xi - 1) r_3 + c_1 c_2 (\xi - c_3)\,\mathfrak{W}, \qquad f_3 = (c_3 \xi - 1) m_3$$

ist. Die andere beruht darauf, daß

$$f_1 = (c_1 \xi - 1) m_1, \qquad g_2 = c_1 c_3 (\xi - c_2) m_3,$$
$$(c_1 \xi - 1)(\xi - c_2) = \xi (c_2 \mathfrak{W} - r_3),$$
$$m_1 m_2 = (\varrho - \varrho_3) m_3,$$
$$c_3 \xi (\varrho - \varrho_3) = (\xi - c_3)(c_3 \xi - 1)$$

ist. Danach ist:

$$f_1 g_2 = c_1 (c_2 \mathfrak{W} - r_3)(\xi - c_3)(c_3 \xi - 1) m_3,$$

und, durch Vertauschung von 1 mit 2:

$$f_2 g_1 = c_2 (c_1 \mathfrak{W} - r_3)(\xi - c_3)(c_3 \xi - 1) m_3.$$

Daher:

$$f_1 g_2 - f_2 g_1 = r_3 m_3 (c_2 - c_1)(\xi - c_3)(c_3 \xi - 1).$$

Somit ist A das Produkt von $r_3 m_3$ mit der quadratischen Funktion von ξ:

$$c_1 c_2 (\xi - c_3)^2 - (c_3 \xi - 1)^2 + (c_2 - c_1)(\xi - c_3)(c_3 \xi - 1).$$

Diese zerfällt in zwei Faktoren. Der eine ist: $c_1(\xi - c_3) + c_3 \xi - 1$, also $- r_2$; der andere ist:

$$c_2 (\xi - c_3) - (c_3 \xi - 1) = - (c_2 c_3 - 1 - \xi (c_2 - c_3)).$$

Daher ist:

$$A = r_2 r_3 (c_2 c_3 - 1 - \xi (c_2 - c_3)) m_3.$$

Ebenso:

$$B = r_2 r_3 (c_2 c_3 - 1 + \xi (c_2 - c_3)) m_2.$$

Da $2(A + B\varepsilon)$ gleich $D_{1,4}$ oder $D_{2,3}$ ist, jenachdem ε gleich $+1$ oder -1 ist, so stellt der Ausdruck

$$2r_2r_3\{(c_2c_3 - 1 - \xi(c_2 - c_3))m_3 + \varepsilon(c_2c_3 - 1 + \xi(c_2 - c_3))m_2\}$$

die Determinante $D_{1,4}$ dar, wenn $\varepsilon = +1$, und $D_{2,3}$, wenn $\varepsilon = -1$ gesetzt wird [1]). Es ist

$$m_3^2 = (\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2), \qquad m_2^2 = (\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_3).$$

$D_{1,4}\,D_{2,3}$ ist daher das Produkt von $4r_2^2r_3^3(\varrho - \varrho_1)$ mit der rationalen Funktion:

$$(c_2c_3 - 1 - \xi(c_2 - c_3))^2(\varrho - \varrho_2) - (c_2c_3 - 1 + \xi(c_2 - c_3))^2(\varrho - \varrho_3),$$

also mit

$$((c_2c_3 - 1)^2 + (c_2 - c_3)^2\xi^2)(\varrho_3 - \varrho_2) - 2(c_2c_3 - 1)(c_2 - c_3)\xi(2\varrho - \varrho_2 - \varrho_3).$$

Dies läßt sich durch $\varrho_3 - \varrho_2$ dividieren, da

$$(c_2c_3 - 1)(c_2 - c_3) = c_2c_3(\varrho_2 - \varrho_3)$$

ist; $D_{1,4}\,D_{2,3}$ ist das Produkt von $4r_2^2r_3^2(\varrho - \varrho_1)(\varrho_3 - \varrho_2)$ mit

$$(c_2c_3 - 1)^2 + (c_2 - c_3)^2\xi^2 + 2c_2c_3\xi(2\varrho - \varrho_2 - \varrho_3).$$

Es ist aber $\xi\varrho = 1 + \xi^2$, $c_2c_3(\varrho_2 + \varrho_3) = (c_2c_3 + 1)(c_2 + c_3)$. Daraus folgt, daß der letzte Ausdruck einfach r_1^2 ist.

Wenn man

$$r_1r_2r_3 = r$$

setzt, so ist:

$$D_{1,4}\,D_{2,3} = 4r^2(\varrho_2 - \varrho_3)(\varrho_1 - \varrho).$$

Diese Gleichung, die bestehen bleibt, wenn man die Zahlen 1, 2, 3 untereinander vertauscht, sagt aus, daß das Doppelverhältnis der vier Größen $\frac{F_a}{G_\alpha}$ gleich dem von ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 und ϱ ist.

Um zu der allgemeinen Auflösung der zwölf Differentialgleichungen

$$\zeta_{13}\zeta_{23} = -\frac{\partial\zeta_{12}}{\partial w} - a_3\frac{\partial\zeta_{12}}{\partial w'} \quad \text{usf.}$$

zu kommen — deren jede aus jeder anderen durch eine Vertauschung der Zahlen 1, 2, 3, 4 entspringt —, nehmen wir mit den Veränderlichen u, v eine lineare Transformation vor:

---

[1]) Die Ausdrücke für $D_{1,4}$ und $D_{2,3}$ lassen sich noch weiter zerlegen. Erstens haben m_2 und m_3 den gemeinsamen Faktor $\sqrt{\varrho - \varrho_1}$. Ferner ist

$$(c_2c_3 - 1 - \xi(c_2 - c_3))\sqrt{\varrho - \varrho_2} + \varepsilon(c_2c_3 - 1 + \xi(c_2 - c_3))\sqrt{\varrho - \varrho_3}$$

das Produkt der beiden algebraischen Funktionen:

$$\frac{\sqrt{(c_2\xi - 1)(c_3\xi - 1)} - \varepsilon\sqrt{c_2c_3(\xi - c_2)(\xi - c_3)}}{\sqrt{c_2c_3\xi}},$$

$$\sqrt{c_3(\xi - c_2)(c_3\xi - 1)} + \varepsilon\sqrt{c_2(\xi - c_3)(c_2\xi - 1)}.$$

$$w = Au + Bv + w_0\,, \qquad w' = Cu + Dv + w'_0,$$

mit willkürlichen Koeffizienten A, B, C, D, w_0, w'_0, und betrachten die Größen $R_{\alpha\beta}$ nicht mehr als Funktionen von u, v, sondern von w, w'. Die Ableitungen

$$\frac{\partial R_{12}}{\partial u} \quad \text{und} \quad \frac{\partial R_{12}}{\partial v}$$

sind dann zu ersetzen durch

$$A\,\frac{\partial R_{12}}{\partial w} + C\,\frac{\partial R_{12}}{\partial w'} \text{ und } B\,\frac{\partial R_{12}}{\partial w} + D\frac{\partial R_{12}}{\partial w'}.$$

Die Differentialgleichung der $R_{\alpha\beta}$ — denn man kann von einer Differentialgleichung sprechen — geht dadurch in die folgende über:

$$R_{13}R_{23} = F_3\Big(A\,\frac{\partial R_{12}}{\partial w} + C\frac{\partial R_{12}}{\partial w'}\Big) + G_3\Big(B\,\frac{\partial R_{12}}{\partial w} + D\frac{\partial R_{12}}{\partial w'}\Big).$$

Wenn man die vier Größenpaare F_α, G_α derselben Transformation unterwirft, der die Differentiale du, dv unterliegen, wenn man

$$\chi_\alpha = AF_\alpha + BG_\alpha\,, \qquad \psi_\alpha = CF_\alpha + DG_\alpha$$

setzt, so wird:

$$R_{13}\,R_{23} = \chi_3\,\frac{\partial R_{12}}{\partial w} + \psi_3\,\frac{\partial R_{12}}{\partial w'}.$$

Wir setzen jetzt, für $\alpha = 1, 2, 3, 4$:

$$\frac{\psi_\alpha}{\chi_\alpha} = \frac{CF_\alpha + DG_\alpha}{AF_\alpha + BG_\alpha} = a_\alpha,$$

und für jedes der sechs Zahlenpaare α, β:

$$R_{\alpha\beta} = -\sqrt{\chi_\alpha}\sqrt{\chi_\alpha}\,\zeta_{\alpha\beta}\,.$$

Die Ausdrücke für die Komponenten $C_{\alpha\beta}$ enthalten dann noch mehr Wurzelgrößen als die $R_{\alpha\beta}$, aber sie sind unvermeidlich. Die Differentialgleichung der $\zeta_{\alpha\beta}$ lautet dann:

$$\zeta_{13}\,\zeta_{23} = -\frac{\partial\zeta_{12}}{\partial w} - a_3\frac{\partial\zeta_{12}}{\partial w'}\,.$$

Hier sind a_1, a_2, a_3, a_4 nicht unabhängige Größen, sondern Funktionen von ξ, c_1, c_2, c_3, A, B, C, D. Wenn man aber die a_α als willkürliche, fest gegebene annimmt, so hat man in den Formeln:

$$CF_\alpha - DG_\alpha = a_\alpha(AF_\alpha + BG_\alpha)$$

vier Gleichungen zwischen ξ, c_1, c_2, c_3, A, B, C, D. In bezug auf A, B, C, D sind sie linear und homogen. Man kann daher durch drei von ihnen die Verhältnisse

$$\frac{A}{D}, \quad \frac{B}{D}, \quad \frac{C}{D}$$

als Funktionen von ξ, c_1, c_2, c_3 bekommen. Zu diesen kommt eine vierte, die linear ist in bezug auf die Größe $\varrho = \dfrac{1}{\xi} + \xi$, mit Koeffizienten, die rational in c_1, c_2, c_3

sind, also auch — da $\varrho_\alpha = \frac{1}{c_\alpha} + c_\alpha$ ist — in c_1, c_2, c_3. Die Definitionsgleichungen der a_α zeigen, daß a_1, a_2, a_3, a_4 dasselbe Doppelverhältnis haben, wie die vier Quotienten $\frac{F_\alpha}{G_\alpha}$. Diese haben nach dem bewiesenen Satze dasselbe Doppelverhältnis, wie $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho$:

$$\frac{(\varrho - \varrho_1)(\varrho_2 - \varrho_3)}{(\varrho - \varrho_2)(\varrho_1 - \varrho_3)} = \frac{(a_4 - a_1)(a_2 - a_3)}{(a_4 - a_2)(a_1 - a_3)},$$

d. h. gleich einem fest gegebenen Werte.

Hier kommt noch eine Quadratwurzel hinzu. $\mathfrak{W}^2 = \varrho^2 - 4$ ist ebenfalls eine rationale Funktion von c_1, c_2, c_3, sogar von $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$. Da nun $\varrho = \frac{1}{\xi} + \xi$, $\mathfrak{W} = \frac{1}{\xi} - \xi$ ist, so ist ξ rational ausdrückbar durch c_1, c_2, c_3 und $\mathfrak{W} = \sqrt{\varrho^2 - 4}$.

Damit sind alle Größen, die in dem Ausdruck von $\zeta_{\alpha\beta}$ vorkommen, genau definiert als algebraische Funktionen von x, y, c_1, c_2, c_3, D. c_1, c_2, c_3 und D sind, neben w_0 und w_0', die willkürlichen Integrations-Konstanten.

Wenn ich die Lösung als eine allgemeine bezeichne, muß ich eine Einschränkung machen. Es gibt spezielle Werte von ξ, für die die angegebene Lösung versagt. Man muß diejenigen Werte von ξ ausschließen, für die eine der Größen r_1, r_2, r_3 gleich 0 wird. Insofern besteht eine Lücke. Sie wird sich wohl ausfüllen lassen.

*Lipschitz*sche Zahlensysteme und *Study*sche Nablafunktionen.

Von *F. Hausdorff* in Bonn

§ 1. Einleitung.

Die *Hermite-Cayley*sche Parameterdarstellung von eigentlichen Automorphien einer quadratischen Form [1]) leidet, wie bekannt, an dem wesentlichen Mangel, daß sich ihr diejenigen Automorphien entziehen, die einen (vom Nullpunkt verschiedenen) Punkt in sein Spiegelbild bezüglich des Nullpunkts überführen. Sie erfaßt also nur einen Teil der eigentlichen Automorphien, der keine Gruppe ist, und hiermit hängt es zusammen, daß selbst in dem Falle, wo zwei Automorphien und ihr Produkt gleichzeitig von der Darstellung erfaßt werden, zwischen den zugehörigen Parametern keine einfache Zusammensetzung besteht. Diese Übelstände sind, zunächst mit — unwesentlicher — Einschränkung auf orthogonale Substitutionen, von *R. Lipschitz* [2]) überwunden worden, mit Hilfe gewisser, übrigens schon von *W. K. Clifford* angegebener hyperkomplexer Zahlensysteme L_n mit 2^n Einheiten. Mittels spezieller (nicht beliebiger) Zahlen P aus L_n, die *R. Lipschitz* als reguläre komplexe Ausdrücke, *K. Th. Vahlen* [3]) als Transformatoren bezeichnet, lassen sich die Automorphien einer quadratischen Form von $n+1$ Variablen *ausnahmelos* und „mit bilinearer Zusammensetzung der Parameter“ (nach dem Ausdruck von *E. Study*) darstellen, nämlich sogar so, daß sich bei Zusammensetzung von zwei Automorphien einfach die Transformatoren multiplizieren. Freilich werden diese Vorzüge durch überzählige Parameter erkauft, deren Anzahl mit n stark wächst. Die Automorphien hängen nur von $\gamma_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ homogenen Parametern ab, während die hyperkomplexen Zahlen P des Systems 2^n Koordinaten haben; die Transformatoren bilden im 2^n-dimensionalen Raume eine γ_n-dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit, die (vgl. den späteren Satz II) durch ein System quadratischer Gleichungen nebst einer quadratischen Ungleichung

[1]) Vgl. etwa *G. Frobenius*, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, dieses Journal 84 (1877), 1—63; § 10.

[2]) *R. Lipschitz*, Untersuchungen über die Summen von Quadraten (Bonn 1886). Vgl. *E. Study*, Theorie der gemeinen und höheren komplexen Größen, Math. Encykl. I A 4 (1898), S. 179; *E. Cartan*, Nombres complexes, Encycl. franç. 15 (1908), Nr. 36.

[3]) *K. Th. Vahlen*, Über Bewegungen und komplexe Zahlen, Math. Ann. 55 (1902), 585—593.

definiert wird. Man kann zwar, wie *Lipschitz* gezeigt hat, immer auf mindestens eine von 2^n Arten γ_n Koordinaten willkürlich lassen und die übrigen rational durch diese ausdrücken; aber diese willkürlich bleibenden sind eben nicht überall dieselben und bei ihrer Auswahl muß man wieder auf die *Hermite-Cayley*sche Einschränkung zurückgreifen, so daß mit dieser lokalen Uniformisierung keine Herabsetzung der Parameterzahl im ganzen verbunden ist.

In dieser kleinen Mitteilung wollen wir zeigen: es ist (mit Zusammenfassung von je zwei Automorphien) für ungerades $n \geqq 5$ möglich, die Parameterzahl 2^n wenigstens auf die Hälfte 2^{n-1} zu reduzieren. Im Falle $n = 5$ ist längst bekannt (*E. Cartan*, l. c. S. 465), daß sich die Automorphien einer quadratischen Form von 6 Variablen mit 16 homogenen, durch keine Bedingungsgleichung verknüpften Parametern darstellen lassen. An Stelle des Transformators P aus L_5 ist hier eine Zahl A aus L_4 getreten, die wir aus einem nachher ersichtlichen Grunde eine Transformatorkomponente nennen. *E. Study*, dem wir eine sehr eingehende Untersuchung dieses Gebietes verdanken [1]), hat bemerkt, daß hierbei eine biquadratische Form $\bigtriangledown A$ der Koordinaten von A, von ihm *Nablafunktion* genannt, eine wesentliche Rolle spielt: in den Gleichungen der Automorphie tritt die Quadratwurzel $\varrho = \sqrt{\bigtriangledown A}$ auf, durch deren Vorzeichen sich die beiden (einzigen) zur selben Transformatorkomponente A gehörigen Automorphien unterscheiden. Die hyperkomplexen Zahlen A sind entweder vierreihige gewöhnliche Matrizen und dann ist $\bigtriangledown A = |A|$ die Determinante von A, oder sie sind zweireihige Quaternionenmatrizen $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, in welchem Falle

$$\bigtriangledown A = p\tilde{p}s\tilde{s} - p\tilde{r}s\tilde{q} - q\tilde{s}r\tilde{p} + q\tilde{q}r\tilde{r}$$

($\tilde{p}$ die zu p konjugierte Quaternion).

An dieses interessante Ergebnis anknüpfend bemerken wir zunächst, daß für ungerades n das System L_n reduzibel und jede Zahl P aus L_n durch ein Paar (A, B) von *geraden* Zahlen A, B aus L_n ersetzbar ist; diese geraden Zahlen bilden ein System L_{n-1}. Wir nennen A, B die Komponenten von P. Die Automorphien einer Form von $n+1$ Variablen werden nun in L_{n-1} darstellbar, zunächst aber mit zwei Zahlen A, B (Transformatorkomponenten), womit also noch keine Halbierung der Parameterzahl gewonnen ist. Bei Ausschließung der niedrigsten Fälle $n = 1, 3$ kommt aber hinzu, daß die erste Komponente A eines Transformators die zweite B und damit den ganzen Transformator zweideutig bestimmt. Und zwar gibt es für $n = 4m + 1$ wieder eine in den Koordinaten von A *biquadratische Nablafunktion* [2]) $\bigtriangledown A$, die hier genau dieselbe Rolle spielt wie die *Study*sche Nablafunktion für $n = 5$. Auf die ausführliche Behandlung dieses Falles wollen wir uns beschränken und den Fall $n = 4m - 1$, in dem ein gleich einfaches Ergebnis nicht erreichbar zu sein scheint, einer anderen Gelegenheit vorbehalten.

---

[1]) *E. Study*, Zur Theorie der linearen Gleichungen, Acta math. 42 (1918), 1—61. Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen, I—IV, Math. Zeitschr. 18 (1923), 21 (1924). Über Summen von fünf und sechs Quadraten und konforme Transformationen, dieses Journal 157 (1926), 33—59.

[2]) In der ersten der angeführten Abhandlungen (Acta math. 42) hat *E. Study* eine andere Verallgemeinerung gegeben (Nablafunktionen höheren Grades); davon soll also hier nicht die Rede sein.

§ 2. *Lipschitz*sche Systeme und Automorphien.

Ein *Lipschitz*sches System L_n wird von n *Grundeinheiten* (Primitivzeichen) $i_1, i_2, \ldots, i_n$ erzeugt, die paarweise alternierende Multiplikation haben (uneigentlich vertauschbar sind) und deren Quadrate gleich ± 1 angenommen werden:

$$(1) \qquad i_\lambda^2 = \sigma_\lambda = \pm 1\,, \quad i_\mu i_\lambda = -\,i_\lambda i_\mu \ (\lambda \neq \mu)\,.$$

Die Zahlen von L_n sind die, unter Voraussetzung des assoziativen und distributiven Gesetzes gebildeten, Polynome in $i_1, \ldots, i_n$. Sie sind lineare Verbindungen von Produkten aus k verschiedenen Grundeinheiten ($k = 0, 1, \ldots, n$) und lassen sich, da ein solches Produkt, wie $J = i_1 i_2 \cdots i_k$, bei gerader (ungerader) Permutation seiner Faktoren in $+J(-J)$ übergeht, auf die Normalform

$$A = a + \sum_\lambda a_\lambda i_\lambda + \sum_{\lambda<\mu} a_{\lambda\mu} i_\lambda i_\mu + \cdots + a_{12\ldots n} i_1 i_2 \cdots i_n$$

bringen, wo die 2^n Koordinaten $a, a_\lambda, a_{\lambda\mu}, \ldots, a_{12\ldots n}$ skalar, d. h. zunächst gewöhnliche komplexe (später reelle) Zahlen sind [1]). Ein Produkt aus k verschiedenen Grundeinheiten heiße von k-ter Ordnung; ist A_k das Aggregat der Glieder k-ter Ordnung von A, so ist

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \sum_0^n A_k\,.$$

Wir führen ein: die zu A *symmetrische* Zahl

$$\overline{A} = A_0 - A_1 + A_2 - \cdots + (-1)^n A_n = \sum_0^n (-1)^k A_k\,,$$

die durch Vertauschung der Vorzeichen aller i_λ aus A entsteht, ferner die zu A *konjugierte* Zahl

$$\widetilde{A} = (A_0 - A_2 + A_4 - \cdots) - (A_1 - A_3 + A_5 - \cdots) = \sum_0^n (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} A_k$$

und endlich die zu A *symmetrisch-konjugierte* oder *inverse* Zahl

$$A^* = (A_0 - A_2 + A_4 - \cdots) + (A_1 - A_3 + A_5 - \cdots) = \sum_0^n (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} A_k\,,$$

die sowohl die konjugierte zur symmetrischen als die symmetrische zur konjugierten ist: $A^* = \overline{\widetilde{A}} = \widetilde{\overline{A}}$. Die Substitutionen, die A durch $A, \overline{A}, \widetilde{A}, A^*$ ersetzen, bilden eine Vierergruppe. Wenn $C = AB$, so ist

$$\overline{C} = \overline{A}\,\overline{B}, \qquad \widetilde{C} = \widetilde{B}\,\widetilde{A}, \qquad C^* = B^* A^*.$$

Von diesen Formeln genügt es, die dritte zu beweisen (die erste ist evident, die zweite Folge der dritten) und sich zu überzeugen, daß für ein Produkt $J = i_\lambda i_\mu \cdots i_\nu$ von gleichen oder verschiedenen Grundeinheiten $J^* = i_\nu \cdots i_\mu i_\lambda$ dasselbe Produkt in umgekehrter Faktorenfolge ist.

Die *Norm*

$$NA = A\widetilde{A}$$

ist im allgemeinen nicht skalar; wenn B eine skalare Norm hat, so ist

[1]) Griechische Buchstaben bedeuten stets Skalare.

$$N(AB) = AB\widetilde{B}\widetilde{A} = NA \cdot NB\,;$$

ein Produkt von Zahlen mit skalarer Norm ist wieder eine solche.

Der Skalarteil des Produktes AB ist offenbar

$$(AB)_0 = \alpha\beta + \sum_\lambda \alpha_\lambda \beta_\lambda i_\lambda^2 + \sum_{\lambda<\mu} \alpha_{\lambda\mu}\beta_{\lambda\mu}(i_\lambda i_\mu)^2 + \cdots = (BA)_0\,.$$

Die linearen Verbindungen der Grundeinheiten

$$x = \xi + \sum \xi_\lambda i_\lambda$$

nennen wir mit *Vahlen Vektoren* (was freilich zu Kollisionen mit dem sonst üblichen Sprachgebrauch führen kann), im Falle $\xi = 0$ *reine Vektoren.* Für zwei reine Vektoren ist

$$xy = \sum_{\lambda\mu} \xi_\lambda \eta_\mu i_\lambda i_\mu = \sum_\lambda \sigma_\lambda \xi_\lambda \eta_\lambda + \sum_{\lambda<\mu} (\xi_\lambda \eta_\mu - \xi_\mu \eta_\lambda) i_\lambda i_\mu\,,$$

$$xy + yx = 2\sum_\lambda \sigma_\lambda \xi_\lambda \eta_\lambda\,,$$

demgemäß für zwei beliebige Vektoren

$$(2) \qquad x\bar{y} + y\bar{x} = 2\Big(\xi\eta - \sum_\lambda \sigma_\lambda \xi_\lambda \eta_\lambda\Big) = \bar{x}y + \bar{y}x,$$

insbesondere

$$x\bar{x} = \xi^2 - \sum_\lambda \sigma_\lambda \xi_\lambda^2 = \bar{x}x\,.$$

Dies ist zugleich die Norm $x\tilde{x}$ von x; Vektoren und Produkte von Vektoren haben skalare Normen.

Die Zahlen $A = A_0 + A_2 + \cdots$ $(\bar{A} = A)$ heißen *gerade*, die Zahlen $A = A_1 + A_3 + \cdots$ $(\bar{A} = -A)$ *ungerade*; die geraden bilden ein System L_{n-1}, das z. B. aus den Grundeinheiten $k_\lambda = i_\lambda i_n (\lambda = 1, \ldots, n-1)$ erzeugt werden kann.

Das Produkt aller Grundeinheiten

$$j = i_1 i_2 \cdots i_n$$

ist bei ungeradem n mit den Grundeinheiten und daher mit allen Zahlen aus L_n vertauschbar $(i_\lambda j = j i_\lambda)$, bei geradem n mit den Grundeinheiten uneigentlich vertauschbar $(i_\lambda j = -j i_\lambda)$.

Wir schicken noch die einfachen Hilfssätze voraus:

(A) *Wenn, für jeden reinen Vektor* x, $\bar{A}x = xA$ *ist, so ist* A *skalar.*

Man kann $A = P + i_1 Q$ setzen, wo P, Q frei von i_1 sind. Für jedes Produkt J von verschiedenen Grundeinheiten aus der Reihe $i_2, \ldots, i_n$ ist $i_1 J = \bar{J} i_1$, z. B. $i_1 i_2 \cdots i_k = (-1)^{k-1} i_2 \cdots i_k i_1$. Also

$$\bar{A} = \bar{P} - i_1\bar{Q} = \bar{P} - Q i_1\,, \qquad \bar{A} i_1 = \bar{P} i_1 - \sigma_1 Q = i_1 P - \sigma_1 Q;$$

wenn dies gleich $i_1 A = i_1 P + \sigma_1 Q$ sein soll, so ist $Q = 0$, A frei von i_1. Ist also $\bar{A} i_\lambda = i_\lambda A (\lambda = 1, \ldots, n)$, so ist A frei von allen i_λ, A skalar.

(B) *Wenn, für jeden reinen Vektor* x, $\bar{A}x = -xA$ *ist, so ist* A *ein skalares Vielfaches von* $j = i_1 i_2 \cdots i_n$.

Mit denselben Bezeichnungen wie soeben folgt zunächst $P = 0$, A enthält kein von i_1 freies Glied, und dann die Behauptung.

(C) *Wenn, für jeden reinen Vektor x, $Ax = xA$ ist, so ist A bei geradem n skalar, bei ungeradem $A = \alpha + \beta j$.*

Es ist $\overline{A}x = x\overline{A}$, also

$$(A + \overline{A})x = x(\overline{A} + A), \qquad (A - \overline{A})x = -x(\overline{A} - A).$$

Nach den vorangehenden Sätzen ist $A + \overline{A}$ skalar, $A - \overline{A}$ Vielfaches von j, also $A = \alpha + \beta j$ und $\beta[1 + (-1)^n] = 0$.

(D) *Wenn, für jeden reinen Vektor x, $Ax = -xA$ ist, so ist A bei geradem n Vielfaches von j, bei ungeradem Null.*

Hier ist $A - \overline{A}$ skalar, also Null, und $A + \overline{A}$ Vielfaches von j, also $A = \beta j$ und $\beta[1 - (-1)^n] = 0$.

Wir gehen nun zu den *Automorphien der quadratischen Form mit $n + 1$ Variablen*

$$x\bar{x} = x\tilde{x} = \xi^2 - \sum_1^n \sigma_\lambda \xi_\lambda^2 \tag{3}$$

über. Als *Transformator* bezeichnen wir *jede reguläre*[1]) *Zahl P des Systems, für die mit x zugleich $\frac{1}{\overline{P}} xP$ stets ein Vektor ist.* Es gilt:

I. *Ist P ein Transformator, so stellen die Gleichungen*

$$y = \frac{1}{\overline{P}} xP \tag{4}$$

$$y = -\frac{1}{\overline{P}} \bar{x}P \tag{5}$$

eine eigentliche resp. uneigentliche Automorphie der Form $x\bar{x}$ dar. Alle Automorphien sind in dieser Weise darstellbar; der zu einer Automorphie gehörige Transformator ist bis auf einen skalaren nicht verschwindenden Faktor bestimmt. Alle Transformatoren sind Produkte regulärer Vektoren.

Zunächst ist klar, daß diese Gleichungen Automorphien darstellen; aus (4) folgt ja $\overline{y} = \frac{1}{P} \bar{x}\,\overline{P}$ und $y\bar{y} = x\bar{x}$, aus (5) ebenso $y\bar{y} = \bar{x}x$. Sodann: ist eine Automorphie in der Form (4) oder (5) darstellbar, so nur in einer dieser Formen, und der zugehörige Transformator P ist bis auf einen skalaren Faktor $\neq 0$ bestimmt. Denn ist zugleich $y = \frac{1}{P} xP = \frac{1}{Q} xQ$, so ist $x = \overline{P}\,\frac{1}{\overline{Q}}\, xQ\,\frac{1}{P} = \frac{1}{\overline{A}} xA$ mit $A = Q\frac{1}{P}$; aus $\overline{A}x = xA$ folgt nach dem Hilfssatz (A), daß $A = \alpha$ skalar ist ($\neq 0$), $Q = \alpha P$. Dasselbe ergibt sich für zwei Darstellungen (5). Wäre aber eine Automorphie in beiden Gestalten (4), (5) darstellbar, $y = \frac{1}{\overline{Q}} xQ = -\frac{1}{\overline{P}} \bar{x}P$, so würde sich, wieder mit $A = Q\frac{1}{P}$, $\overline{A}\,\bar{x} = -xA$ ergeben, insbesondere für reine Vektoren $\overline{A}x = xA$, $A = \alpha \neq 0$; die Gleichung $\alpha\bar{x} = -x\alpha$ ist jedoch für $x = 1$ unmöglich. — Drittens endlich stützen wir uns auf die bekannte Tatsache, daß

[1]) Regulär heißen die Zahlen, die eine Reziproke haben, singulär die übrigen (die Teiler der Null).

sich jede Automorphie aus *Spiegelungen an Hyperebenen*, d. h. aus solchen (von der Identität verschiedenen) Automorphien zusammensetzen läßt, bei denen im affinen Raum der Punkte x alle Punkte einer durch den Koordinatenanfang gehenden Hyperebene in Ruhe bleiben. Diese Spiegelungen sind uneigentliche Automorphien und haben die Form

$$\eta = \xi - 2a\varphi, \qquad \eta_\lambda = \xi_\lambda - 2a_\lambda\varphi,$$
$$\varphi = (a\xi - \sum \sigma_\lambda a_\lambda \xi_\lambda) : (a^2 - \sum \sigma_\lambda a_\lambda^2),$$

wo der Nenner in φ nicht Null sein darf. Vereinigen wir diese Gleichungen zu einer Vektorgleichung, indem wir auch den Vektor $a = a + \Sigma a_\lambda i_\lambda$ einführen, so kommt wegen (2)

$$y = x - a\frac{\bar{a}x + \bar{x}a}{a\bar{a}} = -\frac{a\bar{x}a}{a\bar{a}} = -\frac{1}{\bar{a}}\bar{x}a \qquad (a\bar{a} \neq 0).$$

Durch Zusammensetzung solcher Spiegelungen in gerader oder ungerader Anzahl erhält man alle eigentlichen Automorphien in der Form (4), alle uneigentlichen in der Form (5), wo der Transformator $P = ab\cdots d$ ein *Produkt regulärer Vektoren* bedeutet, bei dem übrigens zwischen gerader und ungerader Faktorenzahl nicht unterschieden werden kann, da ja 1 ein Vektor ist. Hiermit ist I völlig bewiesen.

Beiläufig sei bemerkt: unsere Darstellung, eine Vereinfachung der von *K. Th. Vahlen* gegebenen, benutzt Zahlen aus L_n zur Repräsentation von Automorphien einer Form mit $n+1$ Variablen. Bei *R. Lipschitz* und, nach Ausbesserung einer kleinen Asymmetrie, bei *E. Cartan* werden die eigentlichen Automorphien einer Form von n Variablen durch gerade Zahlen aus L_n (also Zahlen eines Systems L_{n-1}) dargestellt. Nennt man eine reguläre Zahl P einen *reinen* Transformator, wenn mit x zugleich $\frac{1}{\bar{P}}xP$ ein *reiner* Vektor ist, so stellt

$$y = \frac{1}{\bar{P}}xP$$

alle Automorphien der Form $-x\bar{x} = x^2 = \sum \sigma_\lambda \xi_\lambda^2$ dar, wobei P Produkt reiner Vektoren ist und zwar mit gerader (ungerader) Faktorenzahl für eigentliche (uneigentliche) Automorphien; je nachdem ist also P gerade (ungerade), und man erhält

$$y = \frac{1}{P}xP, \qquad y = -\frac{1}{P}xP.$$

Andererseits könnte man bei geradem n, wo j mit den i_λ uneigentlich vertauschbar ist, auch erweiterte Vektoren der Form $x = \xi + \sum \xi_\lambda i_\lambda + \xi_0 j$ heranziehen und Automorphien einer Form mit $n+2$ Variablen in L_n darstellen: das ist eine Variante unseres Verfahrens in § 3. Die Wahl zwischen diesen verschiedenen Darstellungsformen ist schließlich Geschmackssache.

Wir beschränken uns von jetzt an auf Betrachtung eigentlicher Automorphien und können dem Satz I folgende Form geben:

II. *Damit die reguläre Zahl P ein Transformator sei, ist notwendig und hinreichend:*

(α) *$P^* x P$ ist mit x zugleich ein Vektor.*

(β) *$NP = P\widetilde{P} = \varrho$ ist skalar $(\neq 0)$.*

Dann stellt

(6) $$\varrho y = P^* x P$$

die eigentlichen Automorphien der Form $x\bar{x}$ dar.

Die Bedingung (β) *ist eine Folge von* (α), *außer im Falle* $n = 4m - 1$, *wo zunächst nur* $P\widetilde{P} = \varrho + \sigma j$ *ist und also die Bedingung* $\sigma = 0$ *zu* (α) *hinzutritt.*

Zunächst ist die Bedingung (β) notwendig, denn ein Transformator P hat als Vektorenprodukt skalare Norm $P\widetilde{P} = \varrho \neq 0$. Oder auch: aus (4) folgt durch Bildung der symmetrisch-konjugierten Gleichung $y = P^* x \frac{1}{\widetilde{P}}$, also mit $A = P\widetilde{P}$

$$x = \frac{1}{P^*}\frac{1}{P} x P \widetilde{P} = \frac{1}{A} x A ,$$

hieraus nach dem Hilfssatz (A), daß A skalar ist. Danach ist $\frac{1}{P} = \frac{\widetilde{P}}{\varrho}$, $\frac{1}{P} = \frac{P^*}{\varrho}$ und (α) notwendig; diese Betrachtung lehrt zugleich, daß die Bedingungen (α, β) hinreichend sind. — Nehmen wir nun an, es sei zunächst nur (α) erfüllt:

$$z = P^* x P$$

sei mit x zugleich stets ein Vektor; wir setzen x, also auch z als regulär voraus. Indem wir die symmetrische (oder konjugierte) Gleichung bilden und wieder $P\widetilde{P} = A$ setzen, erhalten wir

$$\bar{z} = \widetilde{P}\bar{x}\bar{P} ,$$

$$z\bar{z} = P^* x P \widetilde{P}\bar{x}\bar{P} = x P \widetilde{P}\bar{x}\bar{P}P^* = x A \bar{x}\bar{A} ,$$

wobei wir die Vertauschbarkeit von zwei Faktoren mit skalarem Produkt $\neq 0$ berücksichtigt haben. Für $x = 1$ ergibt sich $A\bar{A}$ als skalar $\neq 0$, und die letzte Gleichung, rechts mit Ax multipliziert, liefert

$$x A = \varphi \cdot A x , \qquad \varphi = z\bar{z} : (x\bar{x} \cdot A\bar{A}) ,$$

wo φ skalar, aber zunächst noch von x abhängig erscheint. Für $x = i_\lambda$ kommt

$$i_\lambda A = \varphi_\lambda A i_\lambda$$

mit konstanten Skalaren φ_λ, danach aber wieder durch Zusammenfassung zu einem Vektor

$$x A = (\xi + \sum \xi_\lambda i_\lambda) A = A (\xi + \sum \varphi_\lambda \xi_\lambda i_\lambda) = A \cdot \varphi x ,$$

$$\xi + \sum \varphi_\lambda \xi_\lambda i_\lambda = \varphi (\xi + \sum \xi_\lambda i_\lambda) ,$$

also in Wahrheit $\varphi = \varphi_\lambda = 1$ von x unabhängig. Mithin ist $Ax = xA$ und nach dem Hilfssatz (C) $A = \varrho + \sigma j$, wo σ zunächst bei geradem n, aber auch für $n = 4m + 1$ verschwindet, weil $A = P\widetilde{P} = \widetilde{A}$ zu sich konjugiert, also $\sigma = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sigma$ ist; nur für $n = 4m - 1$ muß das Verschwinden von σ besonders gefordert werden. Hiermit ist II bewiesen.

Die Zahl $Z = P^* x P$ ist zu sich selbst symmetrisch-konjugiert, $Z^* = P^* x^* P = Z$, demnach von der Form $Z = Z_0 + Z_1 + Z_4 + Z_5 + Z_8 + Z_9 + \cdots$, und die Bedingungen, daß sie sich auf einen Vektor $Z_0 + Z_1$ reduziert, lauten also

$$(7) \qquad (P^* x P)_4 = (P^* x P)_5 = (P^* x P)_8 = (P^* x P)_9 = \cdots = 0 .$$

Hierin hat man x durch $1, i_1, \ldots, i_n$ zu ersetzen und erhält also ein System homogener quadratischer Bedingungen für die Koordinaten von P, zu denen für $n = 4m - 1$ noch die eine Bedingung

$$(P\widetilde{P})_n = 0 \tag{8}$$

tritt. Die Bedingungen (7), deren Anzahl

$$(n+1)\left[\binom{n}{4}+\binom{n}{5}+\binom{n}{8}+\binom{n}{9}+\cdots\right]$$

asymptotisch gleich $(n+1)2^{n-1}$ ist, sind im allgemeinen nicht voneinander unabhängig. Nur in den niedrigsten Fällen kommt die genaue Zahl unabhängiger Bedingungen heraus, nämlich für $n=1$ und $n=2$ keine Bedingung, für $n=3$ die eine Bedingung $(P\widetilde{P})_3 = 0$, für $n=4$ die fünf Bedingungen

$$(P^*P)_4 = (P^* i_1 P)_4 = \cdots = (P^* i_4 P)_4 = 0;$$

die Zahlen

$$2-0=2, \quad 4-0=4, \quad 8-1=7, \quad 16-5=11$$

sind eben die der homogenen Parameter für die Automorphien einer quadratischen Form von 2, 3, 4, 5 Variablen [1]).

§ 3. Fall eines ungeraden n.

Im Fall eines ungeraden n ist $j = i_1 i_2 \cdots i_n$ mit allen Zahlen von L_n vertauschbar und L_n reduzibel, reell-reduzibel für $j^2 = 1$, komplex-reduzibel für $j^2 = -1$. Da $i_n \cdots i_2 i_1 = j^* = (-1)^{\frac{n-1}{2}} j$, so ist

$$j^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n ,$$

ferner $\bar{j} = -j$, $\tilde{j} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} j$. Wir nehmen jetzt an:

$$L_n \text{ reell-reduzibel}, \quad j^2 = 1 .$$

Die Anzahl der negativen σ_λ soll also mod. 2 mit $\frac{n-1}{2}$ kongruent sein.

Die Zahlen P des Systems L_n sind in der Form $P = C + jD$ mit *geraden* Zahlen C, D darstellbar, und zwar nur auf eine Weise ($\overline{P} = C - jD$). Setzt man weiter $C + D = A$, $C - D = B$, so erhält man

$$P = A\frac{1+j}{2} + B\frac{1-j}{2}, \tag{9}$$

und dies entspricht der Spaltung von L_n in zwei Teilsysteme mit den Hauptheiten $\frac{1+j}{2}, \frac{1-j}{2}$, die ihren Quadraten gleich sind und deren Produkt $= 0$ ist. Wir schreiben statt (9) kurz

$$P = (A, B) \tag{10}$$

und nennen A, B die *Komponenten* von P; sie sind durch (9) und die Bedingung, gerade zu sein, eindeutig bestimmt und durchlaufen das System L_{n-1} der geraden Zahlen von L_n. Insbesondere ist

[1]) Die Fälle $n=2$ (Quaternionen), $n=3$ (Biquaternionen mit skalarer Norm, nebst andern reellen Gestalten desselben Typus) sind altbekannt. Zum Fall $n=4$ vgl. *H. Beck*, Über konforme Transformationen im Raume I, dieses Journal 155 (1926), 61—74, und die S. 114 zuletzt genannte Arbeit von *E. Study*.

$$1 = (1, 1), \quad j = (1, -1),$$

für eine Grundeinheit

$$i_\lambda = (j i_\lambda, -j i_\lambda)$$

und daher für einen Vektor $x = \xi + \Sigma \xi_\lambda i_\lambda$

$$x = (\mathfrak{x}, \hat{\mathfrak{x}}),$$

wo

$$\mathfrak{x} = \xi + j \sum \xi_\lambda i_\lambda, \quad \hat{\mathfrak{x}} = \xi - j \sum \xi_\lambda i_\lambda; \tag{11}$$

wir nennen solche Zahlen, die von der Form $X_0 + X_{n-1}$ sind (nur ein skalares Glied und Glieder $(n-1)$-ter Ordnung enthalten), *Vektorkomponenten*, insbesondere $\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{x}}$ *zusammengehörige* Vektorkomponenten [1]). Addition und Multiplikation von Zahlen P geschieht durch Addition und Multiplikation ihrer Komponenten; also

$$(A, B)(A', B') = (AA', BB');$$

P ist dann und nur dann regulär, wenn seine Komponenten regulär sind, und

$$\frac{1}{P} = \left(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}\right).$$

Die zu P symmetrische Zahl ist

$$\overline{P} = (B, A);$$

für die konjugierte und symmetrisch-konjugierte ist zu unterscheiden:

$$n = 4m + 1, \ \tilde{j} = -j: \quad \widetilde{P} = (\widetilde{B}, \widetilde{A}), \quad P^* = (\widetilde{A}, \widetilde{B});$$
$$n = 4m - 1, \ \tilde{j} = \ \ j: \quad \widetilde{P} = (\widetilde{A}, \widetilde{B}), \quad P^* = (\widetilde{B}, \widetilde{A}).$$

Die eigentliche Automorphie (4) spaltet sich nunmehr in zwei Gleichungen

$$\mathfrak{y} = \frac{1}{B}\mathfrak{x}A, \qquad \hat{\mathfrak{y}} = \frac{1}{A}\hat{\mathfrak{x}}B, \tag{12}$$

läßt sich also in L_{n-1} (aber zunächst nur mit einem *Paar* von Zahlen A, B) darstellen; A, B heißen *zusammengehörige Transformatorkomponenten.* Damit $P = (A, B)$ ein Transformator sei, ist notwendig und hinreichend, daß die rechten Seiten der Formeln (12) für jeden Vektor x zusammengehörige Vektorkomponenten sind.

Wir trennen nun die Fälle $n = 4m \pm 1$.

(𝔄) $\qquad n = 4m + 1, \quad \tilde{j} = -j.$

Der Satz II, worin die Bedingung (β) wegfällt, liefert zunächst:

III. *Damit die regulären Zahlen A, B Komponenten eines Transformators $P = (A, B)$ seien, ist notwendig und hinreichend, daß die rechten Seiten der Gleichungen*

$$\varrho\mathfrak{y} = \widetilde{A}\mathfrak{x}A, \quad \varrho\hat{\mathfrak{y}} = \widetilde{B}\hat{\mathfrak{x}}B \tag{13}$$

für jeden Vektor x zusammengehörige Vektorkomponenten seien. Es ist dann

---

[1]) Die neue Bezeichnung mit $\tilde{}$ ist nötig, da im Falle $n = 4m + 1$ $\hat{\mathfrak{x}}$ mit $\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}} = \tilde{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}^*$ nicht zusammenfällt; für $n = 4m - 1$ ist allerdings $\hat{\mathfrak{x}} = \tilde{\mathfrak{x}}$. Übrigens sei, um Trivialitäten auszuschließen, $n \geqq 3$ angenommen.

(14) $$\varrho = P\widetilde{P} = A\widetilde{B} = B\widetilde{A}$$

skalar $\neq 0$ *und die Gleichungen* (13) *liefern die zu* P *gehörige eigentliche Automorphie der Form* $x\bar{x}$.

Das Eigentümliche dieses Falles ist nun, daß vermöge der ersten Gleichung (13) schon die erste Komponente A die Automorphie bestimmt, falls noch ϱ bekannt ist, daß sich also die Parameterzahl von 2^n auf 2^{n-1} erniedrigt. Überdies ist zwar nicht ϱ, wohl aber ϱ^2 ebenfalls durch A allein ausdrückbar. Da nämlich insbesondere für $x = 1$

$$\widetilde{A}A = \mathfrak{p}, \quad \widetilde{B}B = \hat{\mathfrak{p}}$$

Komponenten eines Vektors p sein sollen, so folgt aus (14)

$$\widetilde{A}A\widetilde{B}B = \varrho^2 = \mathfrak{p}\hat{\mathfrak{p}} = p\tilde{p}$$

als Norm dieses Vektors p. Vermöge

(15) $$\widetilde{A}A = \mathfrak{p}, \quad \bigtriangledown A = \mathfrak{p}\hat{\mathfrak{p}}$$

sind aber die Koordinaten des Vektors p quadratische, seine Norm $\bigtriangledown A$ eine *biquadratische Form* der Koordinaten von A: dies nennen wir die *Nablafunktion* von A. Daß ϱ selbst durch A nicht bestimmt sein kann, war vorauszusehen, da ja außer $P = (A, B)$ auch $jP = (A, -B)$ ein Transformator mit derselben ersten Komponente A ist; er entsteht aus P durch Vertauschung von B, ϱ mit $-B$, $-\varrho$, und wenn P den Vektor x in y überführt, so führt jP ihn in $-y$ über (die Vorzeichenvertauschung aller $n+1$ Variablen ist bei ungeradem n eine eigentliche Automorphie). Um den Sachverhalt aber völlig zu durchschauen, müssen wir uns noch von der Kenntnis des ganzen Transformators (A, B) oder der zweiten Komponente B unabhängig machen und Folgendes zeigen:

IV. *Damit die reguläre (gerade) Zahl* A *eine Transformatorkomponente sei, ist notwendig und hinreichend, daß* $\widetilde{A}\mathfrak{x}A$ *zugleich mit* $\mathfrak{x}$ *eine Vektorkomponente sei. Insbesondere ist dann* $\widetilde{A}A = \mathfrak{p}$ *eine solche und die durch* (15) *definierte Nablafunktion* $\bigtriangledown A \neq 0$. *Ist dann* ϱ *ein Wert von* $\sqrt{\bigtriangledown A}$. *so stellt*

(16) $$\varrho\mathfrak{y} = \widetilde{A}\mathfrak{x}A$$

eine eigentliche Automorphie der Form $x\bar{x}$ *dar, die zum Transformator* $P = (A, B)$ *mit* $A\widetilde{B} = \varrho$ *gehört. Zu jeder Transformatorkomponente* A *gehören genau zwei Transformatoren* $P = (A, B)$ *und* $jP = (A, -B)$.

Es wird also vorausgesetzt, daß mit $\mathfrak{x}$ stets

(17) $$\mathfrak{z} = \widetilde{A}\mathfrak{x}A$$

eine Vektorkomponente sei. Wir wollen zeigen, daß aus dieser Gleichung

(18) $$\mathfrak{z}\hat{\mathfrak{z}} = \bigtriangledown A \cdot \mathfrak{x}\hat{\mathfrak{x}}$$

folgt. Setzen wir $\mathfrak{x}$, also auch $\mathfrak{z}$ als regulär voraus und nehmen von (17) die Reziproke, so ergibt sich $\left(\text{mit } C = \frac{1}{A}\right)$

$$\hat{\mathfrak{z}} = \varphi C\hat{\mathfrak{x}}\widetilde{C}, \quad \varphi = \mathfrak{z}\hat{\mathfrak{z}} : \mathfrak{x}\hat{\mathfrak{x}},$$

wo φ skalar, aber zunächst von $\mathfrak{x}$ abhängig ist. Wenn man für den Vektor x insbesondere 1 und i_λ setzt, so erhält man konstante Vektorkomponenten $\mathfrak{d}_0$, $\mathfrak{d}_\lambda$ und Skalare $\varphi_0, \varphi_\lambda$, mit denen die Gleichungen

$$\mathfrak{d}_0 = \widetilde{A}A\,, \qquad \mathfrak{d}_\lambda = \widetilde{A}\,j i_\lambda A\,,$$
$$\hat{\mathfrak{d}}_0 = \varphi_0 C\widetilde{C}, \qquad \hat{\mathfrak{d}}_\lambda = -\varphi_\lambda C\, j i_\lambda \widetilde{C}$$

bestehen, und daraus wieder durch Zusammenfassung mit Faktoren ξ, ξ_λ

$$\mathfrak{d} = \xi\mathfrak{d}_0 + \sum \xi_\lambda \mathfrak{d}_\lambda\,,$$
$$\hat{\mathfrak{d}} = \xi\hat{\mathfrak{d}}_0 + \sum \xi_\lambda \hat{\mathfrak{d}}_\lambda = C(\varphi_0\xi - j\sum \varphi_\lambda \xi_\lambda i_\lambda)\widetilde{C} = C\varphi\,\hat{\mathfrak{x}}\,\widetilde{C},$$

also

$$\varphi_0\xi - j\sum \varphi_\lambda \xi_\lambda i_\lambda = \varphi\,(\xi - j\sum \xi_\lambda i_\lambda)\,,$$

d. h. $\varphi = \varphi_0 = \varphi_\lambda$ von $\mathfrak{x}$ unabhängig; hier ist $\mathfrak{d}_0$ das frühere $\mathfrak{p}$, $\varphi_0 = \mathfrak{d}_0\hat{\mathfrak{d}}_0 = \bigtriangledown A$ und damit die Gleichung (18) bewiesen.

Schreiben wir nun die Gleichung (16) mit $\varrho = \sqrt{\bigtriangledown A}$, so ergibt sich $\mathfrak{y}\,\hat{\mathfrak{y}} = \mathfrak{x}\,\hat{\mathfrak{x}}$, also durch Bildung der Reziproken

$$\frac{1}{\varrho}\,\hat{\mathfrak{y}} = C\,\hat{\mathfrak{x}}\,\widetilde{C}\,,$$

und wenn wir B durch $A\widetilde{B} = \varrho$ definieren:

$$\varrho\,\hat{\mathfrak{y}} = \widetilde{B}\,\hat{\mathfrak{x}}\,B,$$

d. h. die zweite Gleichung (13) folgt aus der ersten, und A ist die erste Komponente des Transformators $P = (A, B)$, außerdem nur noch des durch Vertauschung von ϱ mit $-\varrho$ entstehenden Transformators $jP = (A, -B)$.

Offenbar kann die Gleichung der Automorphie auch noch in eine der Formen

$$\varrho\,\hat{\mathfrak{x}} = A\,\hat{\mathfrak{y}}\,\widetilde{A}\,, \qquad \varrho\,\mathfrak{x} = B\mathfrak{y}\,\widetilde{B} \tag{19}$$

gebracht werden.

Die Automorphie ist durch A in Verbindung mit $\varrho = \sqrt{\bigtriangledown A}$ bestimmt und werde etwa mit $(A \mid \varrho)$ bezeichnet; dieselbe Automorphie wird nur noch durch $(\lambda A \mid \lambda^2\varrho)$ mit beliebigem $\lambda \neq 0$ geliefert. Zwei Automorphien $(A \mid \varrho)$ und $(A' \mid \varrho')$ zusammengesetzt ergeben $(AA' \mid \varrho\varrho')$; daraus folgt unmittelbar, daß das Produkt von zwei Transformatorkomponenten wieder eine und

$$\bigtriangledown(AB) = \bigtriangledown A \cdot \bigtriangledown B \tag{20}$$

ist. Die Vergleichung der ersten Formeln (13) und (19) zeigt, daß mit A auch $\widetilde{A}$ Transformatorkomponente ist und dieselbe Nablafunktion hat:

$$\bigtriangledown\widetilde{A} = \bigtriangledown A\,. \tag{21}$$

Die beiden Vektorkomponenten $\mathfrak{p} = \widetilde{A}A$ und $\mathfrak{q} = A\widetilde{A}$ brauchen übrigens weder identisch noch zusammengehörig ($\mathfrak{q} = \hat{\mathfrak{p}}$) zu sein, obwohl sie dasselbe $\mathfrak{p}\hat{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}\hat{\mathfrak{q}}$ und auch denselben Skalarteil haben.

Da die Zahl $Z = \widetilde{A}\mathfrak{x}A$ gerade und zu sich konjugiert, also von der Form $Z_0 + Z_4 + \cdots + Z_{n-1}$ ist und sich auf $Z_0 + Z_{n-1}$ reduzieren soll, so werden die

Bedingungen für eine Transformatorkomponente

$$(22) \qquad (\widetilde{A}\,\mathfrak{x}\,A)_4 = (\widetilde{A}\,\mathfrak{x}\,A)_8 = \cdots = (\widetilde{A}\,\mathfrak{x}\,A)_{n-5} = 0,$$

worin man für $\mathfrak{x}$ die Werte 1, $j\,i_\lambda$ zu setzen hat. Die Anzahl dieser in den Koordinaten von A quadratischen Bedingungen ist im allgemeinen wieder größer als die der überzähligen Parameter. *Für $n = 5$ fallen die Bedingungen fort*; jede gerade reguläre Zahl A ist Transformatorkomponente und die Automorphien einer quadratischen Form von 6 Variablen werden durch 16 homogene Parameter ohne Bedingungsgleichung dargestellt (aber nicht rational, sondern mit Hilfe von $\sqrt{\nabla A}$).

Die folgende Bemerkung verdient noch ein gewisses Interesse. Die Komponenten $A = A_0 + A_2 + \cdots + A_{n-1}$, $B = B_0 + B_2 + \cdots + B_{n-1}$ einer Zahl $P = P_0 + P_1 + \cdots + P_n$ sind, wie aus ihrer Einführung folgt, gegeben durch

$$A = P_0 + P_2 + \cdots + P_{n-1} + j(P_n + P_{n-2} + \cdots + P_1),$$
$$B = P_0 + P_2 + \cdots + P_{n-1} - j(P_n + P_{n-2} + \cdots + P_1),$$

d. h.

$$A_k = P_k + jP_{n-k}, \quad B_k = P_k - jP_{n-k} \qquad (k = 0, 2, \ldots, n-1).$$

Wenn insbesondere $P = P_0 + P_1 + \cdots + P_{2m}$ höchstens von der Ordnung $\frac{n-1}{2} = 2m$ ist, so ist also

$$A_k = P_k = B_k \qquad (k = 0, 2, \ldots, 2m)$$
$$A_k = jP_{n-k} = -B_k \qquad (k = 2m+2, \ldots, 4m)$$

oder $B = \hat{A}$ mit

$$(23) \qquad \hat{A} = (A_0 + A_2 + \cdots + A_{2m}) - (A_{2m+2} + \cdots + A_{4m}).$$

Hiervon gilt auch die Umkehrung: bei beliebigem geradem A ist $P = (A, \hat{A})$ von der Ordnung $\leqq \frac{n-1}{2}$. (Wenn jP von der Ordnung $\leqq \frac{n-1}{2}$ ist, ist $P = (A, -\hat{A})$ und umgekehrt). Dies gilt insbesondere, wenn $P = ab \cdots d$ Produkt von höchstens $\frac{n-1}{2}$ Vektoren, ein „reduzierter" Transformator ist; und wenn $A = \mathfrak{a}\mathfrak{b} \cdots \mathfrak{d}$ Produkt von höchstens $\frac{n-1}{2}$ Vektorkomponenten ist, so ist seine auf einen reduzierten Transformator $P = ab \cdots d$ führende Ergänzungskomponente $\hat{A} = \hat{\mathfrak{a}}\hat{\mathfrak{b}} \cdots \hat{\mathfrak{d}}$ durch A eindeutig bestimmt. Die Nablafunktion $\nabla A = \widetilde{A}\,A\,\widetilde{B}\,B$ ist hier, wo $B = \hat{A}$, in vier hyperkomplexe Faktoren zerlegbar, die linear von den Koordinaten von A abhängen, und ist das Quadrat einer in diesen Koordinaten quadratischen Form $\varrho = A\widetilde{B}$. Im allgemeinen ist sie, nach (15), nur in die linearen Faktoren $\widetilde{A}$, A und den quadratischen Faktor $\mathfrak{p}$ zerlegbar.

Wir haben nun noch die *Realitätsverhältnisse* zu beachten (ohne deren Berücksichtigung die Vorzeichen der σ_λ gleichgültig sind und es sich um nur orthogonale Transformationen handelt). Reelle Automorphien sind durch reelle [1]) Trans-

[1]) d. h. solche mit reellen Koordinaten.

formatoren P darstellbar. Denn stellt $\overline{P}y = xP$ eine reelle Automorphie dar und ist Q der zu P konjugiert-komplexe (durch Vertauschung von $i = \sqrt{-1}$ mit $-i$ entstehende) Transformator, so ist $\overline{Q}y = xQ$, also $\overline{Q}\frac{1}{\overline{P}}x = xQ\frac{1}{P}$, nach Hilfssatz (A) $Q = \lambda P$ (λ skalar), $P = \overline{\lambda}Q$, $\lambda\overline{\lambda} = 1$, $\lambda = e^{2i\mu}$ mit reellem μ, $Qe^{-i\mu} = Pe^{i\mu}$ oder, wenn man statt $Pe^{i\mu}$ einfach P schreibt, $Q = P$, P ist reell. Für reelle Transformatoren P ist $\varrho = P\widetilde{P}$ reell und die Nablafunktion $\varrho^2 = \nabla A$ positiv. Wir müssen jetzt also unterscheiden: *Komponenten A reeller Transformatoren*, für die $\nabla A > 0$, und *reelle Transformatorkomponenten*, d. h. reelle Zahlen A, die der Bedingung des Satzes IV genügen und für die zunächst nur $\nabla A \leqq 0$. Aus $\varrho = \sqrt{\nabla A}$ und $A\widetilde{B} = \varrho$ folgt, daß eine reelle Transformatorkomponente für $\nabla A > 0$ Komponente eines reellen, für $\nabla A < 0$ reelle Komponente eines komplexen Transformators $P = (A, B)$ mit rein imaginärem B (d. h. reellem iB) ist. Aus (18) oder

$$\zeta^2 - \sum \sigma_\lambda \zeta_\lambda^2 = \nabla A\,(\xi^2 - \sum \sigma_\lambda\, \xi_\lambda^2)$$

geht nun nach dem Trägheitsgesetz der quadratischen Formen hervor, daß sicherlich $\nabla A > 0$ ist, falls die Anzahlen der positiven und negativen Quadrate in der Form $\xi^2 - \Sigma\sigma_\lambda \xi_\lambda^2$ verschieden sind; dann sind reelle Transformatorkomponenten auch ohne weiteres Komponenten reeller Transformatoren. Wenn aber die Form ebenso viele positive wie negative Quadrate enthält, kann in der Tat $\nabla A < 0$ sein, und zu den Bedingungen von IV tritt also für reelle Automorphien noch die Forderung $\nabla A > 0$ hinzu. Es gibt dann nämlich „rein imaginäre" eigentliche Automorphien, d. h. solche, die jeden reellen Vektor x in einen rein imaginären y überführen; für die Form

$$\xi^2 - \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2 - \xi_n^2$$

ist z. B.

$$\eta = i\xi_1, \quad \eta_1 = i\xi, \quad \eta_2 = i\xi_3, \quad \eta_3 = i\xi_2, \cdots, \quad \eta_{n-1} = i\xi_n, \quad \eta_n = i\xi_{n-1}$$

eine solche. Ist P ein zugehöriger Transformator und wieder Q der konjugiert-komplexe, so ist mit $\overline{P}y = xP$ zugleich $-\overline{Q}y = xQ$, woraus wie oben nach dem Hilfssatz (B) folgt, daß $Q = \lambda jP$ oder bei geeigneter Normierung $Q = jP$; es sind also $P = (A, B)$ und $jP = (A, -B)$ konjugiert-komplex, d. h. A reell und B rein imaginär, ϱ rein imaginär und $\varrho^2 = \nabla A < 0$.

Nennen wir

$$\sigma = 1 - \sum \sigma_\lambda \tag{24}$$

die *Charakteristik* eines *Lipschitz*schen Systems L_n; der Restcharakter von $\pm\sigma$ mod. 8 bestimmt die reelle Gestalt von L_n (*Cartan*, l. c. S. 464). Ist n ungerade, also σ gerade, so ist

$$j^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod \sigma_\lambda = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod (-1)^{\frac{1-\sigma_\lambda}{2}} = (-1)^{\frac{\sigma}{2}}$$

und hier, wo $j^2 = 1$, σ durch 4 teilbar; je nachdem $\sigma \equiv 0$ oder $\sigma \equiv 4$ (mod. 8), ist das System L_{n-1} der geraden Zahlen von L_n ein Matrizensystem M oder das Produkt QM eines Matrizensystems mit dem System Q der *Hamilton*schen Quaternionen.

Nur im Falle $\sigma = 0$ gibt es reelle Transformatorkomponenten A mit $\bigtriangledown A < 0$. Ohne die etwas mühselige Transformation von L_{n-1} in die Gestalt M oder QM wirklich durchzuführen, kann man im ersten Falle, wo also die Zahlen von L_{n-1}, insbesondere die Vektor- und Transformatorkomponenten, als r-reihige Matrizen darstellbar sind ($r^2 = 2^{n-1} = 2^{4m}$, $r = 4^m$, $m \geqq 1$), leicht den Zusammenhang der Nablafunktion $\bigtriangledown A$ mit der Determinante von A feststellen, nämlich

$$|A| = (\bigtriangledown A)^{\frac{r}{4}}. \tag{25}$$

Für eine Vektorkomponente $\mathfrak{x}$ folgt nämlich, weil $\mathfrak{x}\hat{\mathfrak{x}} = x\bar{x}$ skalar ist,

$$|\mathfrak{x}|\,|\hat{\mathfrak{x}}| = (x\bar{x})^r,$$

und da die quadratische Form $x\bar{x}$ irreduzibel ist,

$$|\mathfrak{x}| = \lambda(x\bar{x})^{\frac{r}{2}}, \qquad |\hat{\mathfrak{x}}| = \frac{1}{\lambda}(x\bar{x})^{\frac{r}{2}},$$

wo λ konstant (von x unabhängig) ist; durch die Spezialisierung $x = 1$ ergibt sich $\lambda = 1$,

$$|\mathfrak{x}| = |\hat{\mathfrak{x}}| = (x\bar{x})^{\frac{r}{2}}.$$

Stellen wir dann einen Transformator als Vektorenprodukt $P = ab\cdots d$ dar, mit der Norm $\varrho = a\bar{a}\cdot b\bar{b}\cdots d\bar{d}$, so ist seine Komponente $A = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\cdots\mathfrak{d}$ das entsprechende Vektorkomponenten-Produkt,

$$|A| = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\cdots|\mathfrak{d}| = \varrho^{\frac{r}{2}} = \varrho^{2\cdot\frac{r}{4}} = (\bigtriangledown A)^{\frac{r}{4}}.$$

Nach (15) ist ferner $\bigtriangledown A = \widetilde{A}A\hat{\mathfrak{p}} = A\hat{\mathfrak{p}}\widetilde{A} = AC$, wo $C = \hat{\mathfrak{p}}\widetilde{A}$ eine Matrix ist, deren Elemente kubische Formen der Koordinaten von A sind; demnach ist die zu A *adjungierte* Matrix

$$\frac{|A|}{A} = (\bigtriangledown A)^{\frac{r-4}{4}} C,$$

sie zerfällt in den skalaren Faktor $(\bigtriangledown A)^{\frac{r-4}{4}}$ und die kubische Matrix C, d. h. alle $(r-1)$-reihigen Unterdeterminanten von A sind durch die $\frac{r-4}{4}$-te Potenz der Nablafunktion teilbar. Im niedrigsten Falle $n = 5$, $r = 4$ ist $|A| = \bigtriangledown A$ die Nablafunktion selbst.

Über den Fall

$$\mathfrak{B}) \qquad n = 4m - 1, \quad \tilde{j} = j$$

wollen wir nur Folgendes bemerken. Der Satz II nimmt hier diese Gestalt an:

V. *Damit die regulären Zahlen A, B Komponenten eines Transformators $P = (A, B)$ seien, ist notwendig und hinreichend, daß $\widetilde{B}\mathfrak{x}A$ zugleich mit $\mathfrak{x}$ stets Vektorkomponente sei und daß die in diesem Falle skalaren Normen $A\widetilde{A}$, $B\widetilde{B}$ gleich ausfallen ($A\widetilde{A} = B\widetilde{B} = \varrho \neq 0$). Es stellt dann*

$$\varrho\mathfrak{y} = \widetilde{B}\mathfrak{x}A \tag{26}$$

die zu P gehörige eigentliche Automorphie der Form $x\bar{x}$ dar.

In unserem Falle sind nämlich $\mathfrak{x}$ und $\hat{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}$ zusammengehörige Vektorkomponenten; ferner ist $\widetilde{P} = (\widetilde{A}, \widetilde{B})$, $P^* = (\widetilde{B}, \widetilde{A})$ und die Bedingung (α) des Satzes II, wonach $\widetilde{B}\mathfrak{x}A$ und $\widetilde{A}\bar{\mathfrak{x}}B$ zusammengehörige Vektorkomponenten sein müssen, reduziert sich auf die eine, daß $\widetilde{B}\mathfrak{x}A$ Vektorkomponente sein soll. Ferner ist, wie in II festgestellt wurde, $P\widetilde{P} = \varrho + \sigma j$ oder $(A\widetilde{A},\ B\widetilde{B}) = (\varrho + \sigma,\ \varrho - \sigma)$, d. h. $A\widetilde{A} = \varrho + \sigma$ und $B\widetilde{B} = \varrho - \sigma$ sind skalar; es trat dann noch die Bedingung $\sigma = 0$ hinzu. Die Gleichung (6) zerfällt nunmehr in (26) und die konjugierte Gleichung.

Von einer Separation der Komponenten A, B und Halbierung der Parameterzahl läßt der Satz V noch nichts erkennen. Im niedrigsten Fall $n = 3$ werden die Automorphien einer quaternären Form nach Satz II durch Biquaternionen mit skalarer Norm, nach Satz V durch Paare von Quaternionen mit gleichen Normen dargestellt (von den Realitätsverhältnissen abgesehen), beidemal durch 8 homogene Parameter mit einer Bedingungsgleichung. Aber für $n \geqq 7$ gilt auch jetzt noch, *daß durch die erste Komponente A eines Transformators die zweite B bis aufs Vorzeichen bestimmt wird.* Nämlich speziell für $A = 1$ soll $\widetilde{B}\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{x}$ zugleich Vektorkomponente und $B\widetilde{B} = 1$ sein. Insbesondere ist $\widetilde{B} = \beta - j\Sigma\beta_\lambda i_\lambda$ dann selbst Vektorkomponente; der Ausdruck $\widetilde{B}\mathfrak{x}$ enthält nur Glieder der Ordnungen 0, 2 und $n - 1 > 2$, und wenn er Vektorkomponente sein soll, so verlangt das Verschwinden der Glieder 2. Ordnung $\beta_\lambda \xi_\mu - \beta_\mu \xi_\lambda = 0$, d. h. $\beta_\lambda = 0$, also $B = \beta$ skalar, nach der Normenbedingung $B = \pm 1$: die einzigen Transformatoren mit der ersten Komponente 1 sind $(1, 1) = 1$ und $(1, -1) = j$. Wenn demnach $P = (A, B)$ und $P' = (A, B')$ Transformatoren mit gemeinsamer erster Komponente sind, so ist $P'\dfrac{1}{P} = \left(1, B'\dfrac{1}{B}\right)$ ein Transformator, folglich $B' = \pm B$. Da es mir aber bisher nicht gelungen ist, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine Transformatorkomponente A und die Bestimmung der zweiten Komponente B auf eine ebenso einfache Form zu bringen wie im Falle $n = 4m + 1$, so will ich die Mitteilung der gefundenen Ergebnisse unterlassen.

Zum Schluß sei nochmals daran erinnert, daß sich unsere Betrachtung auf den Fall $j^2 = 1$ (L_n reell-reduzibel) bezog; wenn $j^2 = -1$, die Anzahl der negativen σ_λ mod. 2 mit $\dfrac{n+1}{2}$ kongruent ist, so ist L_n nur komplex-reduzibel und die Spaltung in zwei Teilsysteme L_{n-1} auf reellem Wege nicht möglich.

I

Fe
Ge

Numerische Infinitesimalrechnung

von

Dr. Martin Lindow
Privatdozent an der Universität Münster i. W.

Mit 17 Figuren

1928. Gr. 8° (VIII und 176 S.) M. 15.—

Ferd. Dümmlers Verlag · Berlin SW 68
Gegr. 1808 Schützenstr. 29/30

Aus dem Vorwort

Wenn eine Funktion durch ihren analytischen Ausdruck gegeben ist, so zeigt uns die Infinitesimalrechnung, wie man sie differentiiert, in Reihen entwickelt, integriert, und wie man Differentialgleichungen löst, in denen sie vorkommt. Oft aber werden die höheren Differentialquotienten recht verwickelt, oft treten Integrale und Differentialgleichungen auf, die sich nicht „in geschlossener Form“ lösen lassen. Daß man auch unter diesen Umständen noch weiter arbeiten kann, wenn nur die vorkommenden Funktionen numerisch gegeben sind, sei es auch nur durch eine empirisch gefundene Tabelle, soll dies Buch zeigen.

Die reine Mathematik strebt nach absoluter Strenge und Allgemeinheit. Oft aber ist ihr Vorgehen, vom praktischen Standpunkte aus betrachtet, ungeeignet, einen konkreten Fall zu untersuchen. Wenn hier unsere Methoden hilfreich eintreten, so dürfen sie wohl des Interesses der Mathematiker gewiß sein. Daß sie für den Physiker, Chemiker, Ingenieur von größter Bedeutung sind, bedarf keines Beweises. Die Genauigkeit der astronomischen Rechnungen ist sprichwörtlich; wenn die meisten von ihnen Mittel verwenden, die im Sinne der reinen Mathematik Näherungsverfahren sind, so spricht das wohl am besten für diese Methoden. Es erschien deshalb zweckmäßig, sie aus ihrer Verbindung mit ganz speziellen Problemen, z. B. der Störungstheorie, zu lösen und weitere Kreise auf ihre allgemeine Verwendbarkeit aufmerksam zu machen. Bei den Beispielen bevorzugte ich einige elementare Aufgaben der Astronomie. Es ist das nur eine Dankespflicht, die einer Wissenschaft gegenüber angebracht ist, welche den wichtigsten Spezialfall des Dreikörperproblems gelöst hat, eines Problems, das an der Grenze vieler Gebiete steht. Ein Ausblick darauf schließt das Buch.

Dr. M. Lindow.

Inhalt

1. Kapitel. Interpolationsrechnung

		Seite
1.	Vorbemerkungen	1
2.	Ein Beispiel für die lineare Interpolation	1
3.	Die quadratische Interpolation	
4.	Interpolation durch ganze rationale Funktionen	3
5.	Das Differenzenschema	5
6.	Bemerkungen und Zusätze zum Differenzenschema	6
7.	Das Differenzenschema für ganze rationale Funktionen	10
8.	Einfluß der Intervallverkleinerung auf das Differenzenschema	12
9.	Anwendung des Differenzenschemas zur Aufdeckung eines Rechenfehlers	13
10.	Extrapolation	14
11.	Das Hornerschema	15
12.	Die Form der Interpolationsfunktion	16
13.	Hilfssatz	18
14.	Bemerkungen zum Hilfssatz	18
15.	Die Newtonsche Interpolationsformel	19
16.	Die Gaußschen Interpolationsformeln	23
17.	Die Stirlingsche Formel	24
18.	Die Besselschen Formeln	26
19.	Die Interpolation in die Mitte	28
20.	Eine Erweiterung des vorigen Paragraphen	28
21.	Ein Uebungsbeispiel aus dem Dreikörperproblem	30
22.	Tabellenmaterial und Rechenhilfsmittel	30
23.	Interpolation bei beliebigen Argumenten	31
24.	Darstellung periodischer Funktionen	36
25.	Ermittelung der Koeffizienten durch Integration	36
26.	Hilfssätze	37
27.	Die Koeffizienten der trigonometrischen Reihe als Summen	39
28.	Die Berechnung der Cosinusglieder	41
29.	Die Berechnung der Sinusglieder	41
30.	Das Rechenschema für die Koeffizienten	42
31.	Formeln für Zwölfteilung	42
32.	Eine andere Anlage des Schemas	42
33.	Die Vierundzwanzigteilung	43
34.	Rechenhilfsmittel für die harmonische Analyse	43
35.	Beispiele zur harmonischen Analyse	44
36.	Spezialfälle der harmonischen Analyse	47

2. Kapitel. Numerische Differentiation

1.	Einleitung	49
2.	Differentialquotienten aus den Newtonschen Formeln	49
3.	Eine andere Herleitung der höheren Differentialquotienten	52
4.	Der Aufbau einer Funktion und die allgemeinen Differentialquotienten	53
5.	Differentialquotienten aus der Stirlingschen Formel	55
6.	Differentialquotienten nach der Besselschen Formel	55
7.	Allgemeine Differentialquotienten aus der Stirlingschen und Besselschen Formel	57
8.	Anwendungen der vorhergehenden Formeln	58
9.	Die Auflösung numerischer Gleichungen	58
10.	Aufgaben	60
11.	Maxima und Minima	60
12.	Aufgaben	61
13.	Differentiation bei nicht äquidistanten Argumenten	62

Inhalt

3. Kapitel. Numerische Integration

		Seite
1.	Einleitende Bemerkungen	64
2.	Integration über das Intervall $a+\frac{w}{2} \dots a+\frac{w}{2}+nw$	64
3.	Integration über das Intervall $a \dots a+w$	65
4.	Integration über das Intervall $a \dots a+iw$	65
5.	Beispiele. Der Burrausche Punkt	67
6.	Integration über das Intervall $a \dots a+(i+\frac{1}{2})w$	69
7.	Integration über das Intervall $a-\frac{1}{2}w \dots a+(i+\frac{1}{2})w$ und $a-\frac{1}{2}w \dots a+iw$	71
8.	Zusammenstellung von Formeln	72
9.	Integration bis zur oberen Grenze $a+iw+nw$ und $a+(i+\frac{1}{2})w+nw$	74
10.	Integration zwischen zwei beliebigen Grenzen	75
11.	Aufgaben	75
12.	Integration am Anfang und Schluß des Differenzenschemas	78
13.	Doppelintegrale	81
14.	Aufgaben	83
15.	Das Doppelintegral zwischen den Grenzen a und $a+iw$	83
16.	Aufgaben	85
17.	Das Doppelintegral mit der oberen Grenze $a+(i+\frac{1}{2})w$	86
18.	Das Anfangsglied der zweiten summierten Reihe	87
19.	Das Doppelintegral zwischen den Grenzen $a-\frac{1}{2}w$ und $a+iw$	88
20.	Zusammenstellung der Ergebnisse für die Doppelintegrale	88
21.	Doppelintegrale mit den oberen Grenzen $a+iw+nw$ und $a+(i+\frac{1}{2})w+nw$	89
22.	Aufgaben	91
23.	Doppelintegrale am Beginn und Schluß des Differenzenschemas	94
24.	Dreifache Integrale	96

4. Kapitel. Numerische Behandlung der Differentialgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Dreikörperproblems

1.	Numerische Behandlung totaler Differentialgleichungen erster Ordnung. (Erstes Verfahren)	99
2.	Zweites Verfahren	104
3.	Drittes Verfahren	107
4.	Eine Modifikation des vorigen Verfahrens	108
5.	Viertes Verfahren. Ein Unstetigkeitspunkt	110
6.	Integration von Differentialgleichungen durch Potenzreihen	114
7.	Das Verfahren von Runge-Kutta	116
8.	Simultane Differentialgleichungen erster Ordnung	119
9.	Lösung simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung durch Potenzreihen und nach dem Verfahren von Runge-Kutta	121
10.	Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung	123
11.	Aufgaben	126
12.	Simultane Differentialgleichungen zweiter Ordnung	130
13.	Anwendung des Runge-Kuttaschen Verfahrens auf simultane Differentialgleichungen zweiter Ordnung	135
14.	Eine Kontrolle unserer Lösungen	136
15.	Ein weiteres Beispiel	137
16.	Aufgaben	139
17.	Die Enckesche Theorie der speziellen Störungen	140
18.	Das problème restreint	144
19.	Ein Beispiel zum problème restreint	149
20.	Die Thielesche Transformation	151

Tabellen

JAN 26

JUBILÄUMSBAND II

AUS ANLASS DES 100 JÄHRIGEN BESTEHENS

BIOLOGICAL ROOM
GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Hasse, Schaefer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 158.

Heft 3.

Mit Bildern von Riemann, Lipschitz, Clebsch und Weber.

Ausgegeben den 8. Dezember.

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG, VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1927

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 158. Heft 3.

(Jubiläumsband II.)

Mit Bildern von Riemann, Lipschitz, Clebsch und Weber.

Inhaltsverzeichnis.

Steinitz Ernst, Über isoperimetrische Probleme bei konvexen Polyedern . . . Seite 129

Zermelo E., Über das Maß und die Diskrepanz von Punktmengen . . . . — 154

Tietze Heinrich, Über konvexe Figuren . . . . . — 168

Haußner Robert, Untersuchungen über Lückenzahlen und den *Goldbach*schen Satz — 172

Hensel Kurt, Über eindeutige Zerlegung in Primelemente . . . . . — 194

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Bernhard Riemann
geb. 17. September 1826, gest. 20. Juli 1866.
(aus Acta mathematica 1882—1912, Table générale des Tomes 1—35).

Rudolf Lipschitz
geb. 14. Mai 1832, gest. 7. Oktober 1903.

Alfred Clebsch
geb. 14. Januar 1833, gest. 7. November 1872.

Heinrich Weber
geb. 5. März 1842, gest. 17. Mai 1913.
(aus Acta mathematica 1882—1912, Table générale des Tomes 1—35).

Band 158. Heft 3.

(Jubiläumsband II.)

Mit Bildern von Riemann, Lipschitz, Clebsch und Weber.

Inhaltsverzeichnis.

Sydekum Ernst, Über isoperimetrische Probleme bei konvexen Polyedern . . . Seite 129

Gerardo Ea, Über das Maß und die Diskrepanz von Punktmengen . . . — 154

Tietze Heinrich, Über konvexe Figuren . . . — 168

Haußner Robert, Untersuchungen über Lückenzahlen und den *Goldbach*schen Satz — 172

Hensel Kurt, Über eindeutige Zerlegung in Primelemente . . . — 194

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Arbeiten bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Bernhard Riemann
geb. 17. September 1826, gest. 20. Juli 1866.
(aus Acta mathematica 1882—1912, Table générale des Tomes 1—35).

Rudolf Lipschitz
geb. 14. Mai 1832, gest. 7. Oktober 1903.

Alfred Clebsch
geb. 14. Januar 1833, gest. 7. November 1872.

Heinrich Weber
geb. 5. März 1842, gest. 17. Mai 1913.
(aus Acta mathematica 1882—1912, Table générale des Tomes 1—35).

d
u
L
P
b
F
u
je
is
m
st
k
da
di
im
su
Zu
od
de
Ei
Po
me
fin
wi
go

figu

Über isoperimetrische Probleme bei konvexen Polyedern.

Von *Ernst Steinitz* in Kiel.

§ 1.

Im 24. Bande dieses Journals hat *J. Steiner* zwei Aufsätze veröffentlicht, in denen er eine Fülle von Problemen der Maxima und Minima bei ebenen, sphärischen und räumlichen Figuren in Fortsetzung weit zurückliegender Untersuchungen *Lhuiliers* behandelt [1]). Einen breiten Raum nehmen dabei die isoperimetrischen Probleme ein, bei denen aus einer Klasse von Figuren diejenige gesucht wird, die bei gegebenem Volumen V die kleinste Oberfläche, bzw. bei gegebener Oberfläche F das größte Volumen besitzt. Der Ausdruck $\varkappa = \frac{F^3}{V^2}$, der eine bloße Zahl ist und bei ähnlichen Figuren denselben Wert hat, wird für die gesuchte zum Minimum.

Um uns bequem ausdrücken zu können, wollen wir von zwei Figuren diejenige, für welche $\varkappa$ den kleineren Wert hat, die „*bessere*" nennen. In diesem Sinne ist dann die Kugel die beste Figur überhaupt. Für den Beweis dieser lange vermuteten Tatsache haben *Lhuilier* und *Steiner* bedeutende Ansätze gegeben. Vollständig geführt wurde er erst durch spätere Untersuchungen von *Schwarz*, *Minkowski* u. a.

Während das isoperimetrische Problem bei Polygonen mit dem Satze, daß das reguläre n-Eck oder n-Seit zugleich das beste ist (d. h. bei gegebenem Umfange die größte Fläche hat), erledigt ist, gestalten sich die entsprechenden Aufgaben im Raume mannigfaltiger und begegnen großen Schwierigkeiten. Die Untersuchungen sind auch über die ersten Anfänge noch nicht hinausgekommen [2]). Zunächst erhalten wir zwei Aufgaben, indem wir entweder zu gegebener Flächen- oder Eckenanzahl das beste Polyeder zu bestimmen suchen. Aber die Einteilung der Polyeder allein nach der Flächen- oder Eckenzahl ist eine zu äußerliche. Schon *Euler* hat in richtiger Erkenntnis des *topologischen* Einteilungsprinzips die Polyeder nach *Typen* unterschieden, und demgemäß hat *Steiner* das isoperimetrische Problem formuliert: *Unter allen Polyedern eines Typus das beste zu finden.* Das ist so zu verstehen: Denken wir uns die Ecken eines Polyeders irgendwie bezeichnet, und schreiben wir die einzelnen das Polyeder begrenzenden Polygone auf, indem wir ihre Ecken in ihrer zyklischen Folge notieren. Wir erhalten

[1]) *Steiner*, Werke 2, S. 177—308. *Lhuilier*, „De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum" (Varsaviae 1782).

[2]) Vgl. die Einleitung der ersten oben zitierten *Steiner*schen Abhandlung.

so eine schematische Darstellung des Polyeders oder genauer Polyeder*typus*. Alle Polyeder nämlich, die bei geeigneter Bezeichnung der Ecken dasselbe Schema liefern, gelten als *isomorph* oder *von gleichem Typus*. So stellt

(1) $A_1A_2, \ldots, A_n;\ SA_1A_2;\ SA_2A_3; \ldots; SA_{n-1}A_n;\ SA_nA_1$

das Schema einer *n-seitigen Pyramide* mit der Grundfläche $A_1A_2, \ldots, A_n$ und der Spitze S dar. Für diesen Typus wurde das isoperimetrische Problem bereits von *Lhuilier* gelöst. Die beste n-seitige Pyramide ist durch drei Eigenschaften charakterisiert: 1. ihre Grundfläche ist ein reguläres n-Eck; 2. die Verbindungsgerade der Spitze S mit der Mitte M der Grundfläche steht auf dieser senkrecht; 3. die von S ausgehende Höhe einer Seitenfläche verhält sich zum Radius des der Grundfläche einbeschriebenen Kreises wie 3 : 1. Die dritte Bedingung läßt sich auch durch eine der folgenden, von *Steiner* angegebenen, ersetzen: 3a. die Grundfläche ist der vierte Teil der gesamten Oberfläche; oder 3b. die einbeschriebene Kugel berührt die Flächen in ihren Schwerpunkten. — Der Fall $n = 3$ liefert den Satz, *daß unter den Tetraedern das reguläre das beste ist.*

Außer *Pyramiden* behandeln *Lhuilier* und *Steiner* noch *Doppelpyramiden* und *Prismen* (diese an erster Stelle). Eine Doppelpyramide entsteht durch Zusammenfügen zweier einfacher Pyramiden mit gemeinsamer Grundfläche. Ist diese ein n-Eck, so setzt sich die Oberfläche der Doppelpyramide aus $2n$ Dreiecken zusammen; wir erhalten das Schema

(2) $SA_1A_2;\ SA_2A_3; \ldots; SA_nA_1;\ S'A_1A_2;\ S'A_2A_3; \ldots; S'A_nA_1,$

wo S, S' die Spitzen der beiden einfachen Pyramiden sind. Als Schema des n-seitigen Prismas erhalten wir

(3) $A_1A_2, \ldots, A_n;\ B_1B_2, \ldots, B_n;\ A_1A_2B_2B_1;\ A_2A_3B_3B_2; \ldots; A_nA_1B_1B_n,$

wobei die beiden zuerst angegebenen Flächen die Grundflächen, die übrigen die Seitenflächen sind. Man erkennt leicht, daß die durch (2) und (3) bezeichneten Typen zueinander *dual* sind. — Man erhält nun die beste Doppelpyramide mit $2n$ Dreiecken, indem man von einer Pyramide ausgeht, welche die beiden oben angegebenen Eigenschaften 1. und 2. der besten Pyramide hat, während die von der Spitze ausgehende Höhe des Seitendreiecks zum Radius des der Grundfläche einbeschriebenen Kreises im Verhältnis $\sqrt{3} : 1$ steht, und zu dieser Pyramide ihr bezüglich der Grundfläche genommenes Spiegelbild hinzufügt. Das beste n-seitige Prisma aber ist dadurch charakterisiert, daß es reguläre Grundflächen, dazu senkrechte Seitenflächen hat und einer Kugel umbeschrieben ist.

Zu diesen Resultaten war bereits *Lhuilier* gelangt. *Doch ist damit, im Gegensatz zum Pyramidenfall, das isoperimetrische Problem im Sinne Steiners noch nicht erledigt*, weil nämlich „Doppelpyramide" und „Prisma" keine Bezeichnungen für Typen sind. Denn ein Polyeder vom *Typus der Doppelpyramide* mit $2n$ Dreiecken, ein Polyeder also, das dem Schema (2) entspricht, ist, wenn $n > 3$, im allgemeinen selbst keine Doppelpyramide; es ist nur dann eine solche, wenn die mit $A_1, \ldots, A_n$ bezeichneten Ecken alle in derselben Ebene liegen. Ebensowenig braucht ein Polyeder vom *Typus des n-seitigen Prismas* ($n \geqq 3$) selbst ein Prisma zu sein. Schneiden wir z. B. von einem Tetraeder $A_1A_2A_3S$ durch eine

Ebene, welche die Kanten SA_1, SA_2, SA_3 in den Punkten B_1, B_2, B_3 trifft, das Tetraeder $B_1B_2B_3S$ weg, so entspricht das zurückbleibende Pentaeder dem Schema (3) für $n = 3$, ist also vom Typus des dreiseitigen Prismas, ohne selbst ein solches zu sein.

Steiner hat nun einen wesentlichen Fortschritt über *Lhuilier* hinaus erzielt, indem er zeigte, daß die beste Doppelpyramide mit $2n$ Dreiecken zugleich das beste unter allen isomorphen Polyedern ist. *Damit war also das isoperimetrische Problem für die Doppelpyramidentypen gelöst.* — Der Fall $n = 4$ liefert den Satz, *daß das reguläre Oktaeder unter allen isomorphen Polyedern das beste ist.*

Unter diesen Umständen lag die Vermutung nahe, daß auch das beste n-seitige Prisma innerhalb des gesamten Typus das beste Polyeder sein möchte. *Steiner* hat diese Vermutung ausgesprochen, ohne in einem einzigen Falle über ihre Richtigkeit entscheiden zu können. Wir kommen auf diese Frage weiter unten (§ 5) zurück.

Noch auf einen Umstand hat *Steiner* nachdrücklich hingewiesen, daß nämlich bei Pyramiden, Doppelpyramiden und Prismen allemal das beste Polyeder einer Kugel umbeschrieben ist, und zwar so, daß jede Fläche in ihrem Schwerpunkt berührt wird. Er stellt hiernach die Frage: *Hat bei jedem Typus konvexer Polyeder das beste Polyeder die Eigenschaft, eine einbeschriebene Kugel zu besitzen, welche die Flächen in ihren Schwerpunkten berührt?*

§ 2.

Um später darauf verweisen zu können, stellen wir hier die Werte des Ausdrucks

$$\varkappa = \frac{F^3}{V^2},$$

für eine Reihe von Körpern zusammen. Es mögen A_n, B_n, C_n die Werte von $\varkappa$ für das beste Polyeder im Bereiche 1) der n-seitigen Pyramiden, 2) der n-seitigen Prismen, 3) der Doppelpyramiden mit $2n$ Dreiecken sein ($n \geqq 3$). Durch elementare Rechnung erhält man die Formeln:

$$A_n = 72\,n \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}, \quad B_n = 54\,n \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}, \quad C_n = 27\sqrt{3}\cdot n \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Da $\sin u \cdot \cos u - u$ für positives u stets negativ,

$$\frac{d}{dx}\left(x \operatorname{tg}\frac{\pi}{x}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{x}\cdot\cos\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x}}{\cos^2\frac{\pi}{x}}$$

und

$$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{tg}\frac{\pi}{x} = \pi$$

ist, so nähern sich A_n, B_n, C_n mit wachsendem n ständig abnehmend ihren Grenzwerten

$$A_\infty = 72\pi, \quad B_\infty = 54\pi, \quad C_\infty = 27\sqrt{3}\pi.$$

Diese selbst stellen die Werte von $\varkappa$ für den *besten Kegel, Zylinder* und *Doppelkegel* dar.

A_3, B_4, C_4 sind die Werte von $\varkappa$ beim *regulären Tetraeder, Hexaeder* und *Oktaeder*. Beim *regulären Dodekaeder* und *Ikosaeder* erhalten wir für $\varkappa$ die Werte

$$D = 540\,\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)^2} \quad \text{und} \quad J = 270\sqrt{3}(7-3\sqrt{5}).$$

Die *Kugel* endlich liefert den kleinsten Wert von $\varkappa$, nämlich

$$K = 36\pi\,.$$

Als besonders bemerkenswert sei die Gleichung

$$B_6 = C_4 = 108\sqrt{3} \tag{4}$$

hervorgehoben.

Die numerische, bis zur zweiten Dezimalstelle durchgeführte Berechnung ergibt die folgenden, nach absteigender Größe geordneten Werte:

$A_3 = 374{,}12.$	$A_4 = 288.$	$B_3 = 280{,}59.$	$A_5 = 261{,}55.$
$A_6 = 249{,}41.$	$C_3 = 243.$	$A_7 = 242{,}71.$	$A_\infty = 226{,}19.$
$B_4 = 216.$	$B_6 = C_4 = 187{,}06.$	$B_{12} = 173{,}63.$	$B_{13} = 173{,}02.$
$B_{33} = 170{,}16.$	$B_{34} = 170{,}11.$	$B_{48} = 169{,}89.$	$C_5 = 169{,}88.$
$B_{49} = 169{,}87.$	$B_\infty = 169{,}64.$	$C_6 = 162.$	$C_{13} = 150{,}19.$
$D = 149{,}86.$	$C_{14} = 149{,}78.$	$C_\infty = 146{,}92.$	$J = 136{,}46.$

$$K = 113{,}10.$$

§ 3.

In einer im 2. Bd. der Math. Annalen erschienenen Abhandlung hat *L. Lindelöf* ein Resultat abgeleitet, das sowohl von ihm selbst wie von anderen als Beantwortung der am Ende von § 1 angegebenen, von *Steiner* aufgeworfenen Frage angesehen worden ist. Dies trifft nicht ganz zu; denn die *Steiner*sche Fragestellung betrifft die *Polyeder eines und desselben Typus. Lindelöf* aber zieht alle (konvexen) *Polyeder einer bestimmten Flächenzahl n* in Betracht. Sein Satz lautet:

„Von allen konvexen Polyedern mit derselben Anzahl n von Flächen hat dasjenige, welches bei gegebener Oberfläche das größte Volumen besitzt, die Eigenschaft, einer Kugel in der Weise umbeschrieben zu sein, daß jede Fläche von der Kugel in ihrem Schwerpunkt berührt wird.“

Was *Lindelöf* tatsächlich beweist, ist, daß das Differential des Ausdrucks

$$\varkappa = \frac{F^3}{V^2}, \qquad \text{d. i.} \qquad d\varkappa = \frac{F^2}{V^3}(3\,V\,dF - 2F\,dV),$$

falls die Flächen willkürlich veränderlich sind[1]), nur dann verschwinden kann, wenn das Polyeder die eben bezeichnete Eigenschaft besitzt, wenn es, wie wir

[1]) Man hat hierbei $\varkappa$ als Funktion von $3n$ unabhängigen Parametern aufzufassen. Als solche kann man die Koeffizienten in den Gleichungen $a_i x + b_i y + c_i z = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ der Flächen wählen. Nimmt man ein anderes System $p_1, \ldots, p_{3n}$, so müssen für die in Betracht kommenden Wertsysteme die a_i, b_i, c_i eindeutige Funktionen der p sein und die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(a_1, \ldots, c_n)}{\partial(p_1, \ldots, p_{3n})}$ muß $\neq 0$ sein.

kurz sagen wollen, der *Lindelöfschen Bedingung* genügt. Zu diesem Resultat gelangt *Lindelöf* in zwei Schritten:

Er betrachtet zuerst die Flächen nur als parallel verschiebbar und zeigt, daß unter diesen Umständen für das Verschwinden des Differentials $d\varkappa$ notwendig und hinreichend ist, daß das Polyeder einer Kugel umbeschrieben ist. Zweitens wird gezeigt, daß wenn die Polyederebenen als Tangentialebenen einer festen Kugel sonst aber willkürlich veränderlich angenommen werden, das Verschwinden des Differentials dx erfordert, daß die Berührung in den Schwerpunkten stattfindet [1]). Hieraus folgt natürlich, daß das beste (konvexe) Polyeder von gegebener Flächenzahl die *Lindelöf*sche Bedingung erfüllen muß, falls ein solches bestes Polyeder überhaupt existiert. Auf die *Existenzfragen* ist *Lindelöf* nicht weiter eingegangen.

Minkowski hat auf einem ganz andern Wege denjenigen Teil der *Lindelöf*schen Untersuchungen, der sich auf konvexe Polyeder mit parallel verschiebbaren Grenzebenen bezieht, nochmals behandelt und zwar so, daß zugleich auch der Existenzbeweis geführt wird. Sind ein konvexes Polyeder $\mathfrak{P}$ und eine Kugel $\mathfrak{K}$ gegeben, so ist klar, daß ein bestimmtes Polyeder $\mathfrak{P}_1$ existiert, dessen Ebenen denen von $\mathfrak{P}$ parallel sind (wobei die innern Normalen entsprechender Ebenen von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ gleichgerichtet sein sollen) und die Kugel $\mathfrak{K}$ berühren. *Minkowski* zeigt nun direkt, daß $\mathfrak{P}_1$ besser als $\mathfrak{P}$ ist, falls nicht schon $\mathfrak{P}$ einer Kugel umbeschrieben ist, in welchem Falle natürlich $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ ähnlich, also auch von gleicher Güte sind. — Auch für den zweiten Teil der *Lindelöf*schen Untersuchungen ist es nicht schwer, den fehlenden Existenzbeweis nachzuholen. Wir kommen später auf diese Angelegenheit noch einmal zurück.

Da das Verschwinden des Differentials nur eine notwendige Bedingung für den Eintritt eines Extremums gibt, *so stellt auch die Lindelöfsche Bedingung nur eine für das beste Polyeder von gegebener Flächenanzahl notwendige Bedingung dar.* Auf der Verkennung dieser Tatsache beruhen die Bemerkungen, die *E. Hess* zum *Lindelöf*schen Satze gemacht hat [2]). Die besten Polyeder, die wir im Bereiche der Pyramiden, Doppelpyramiden und Prismen antreffen, genügen alle der *Lindelöfschen* Bedingung. Unter ihnen haben aber immer je 2 oder 3 die gleiche Flächenzahl m, nämlich im Falle eines ungeraden m ein Prisma und eine Pyramide, im Falle eines geraden m ein Prisma, eine Pyramide und eine Doppelpyramide. Hierin glaubt *Hess* einen Widerspruch zum Wortlaut des *Lindelöf*schen Satzes zu erkennen und hält die Anbringung einer Korrektur für erforderlich:

„Bei der Fassung dieses Satzes hat zwar *Lindelöf* die beschränkende Bestimmung, daß die zu vergleichenden konvexen Polyeder von derselben Zahl der Seitenflächen, auch die gleiche Anordnung und Beschaffenheit dieser Seitenflächen darbieten müssen, nicht hinzugefügt; doch ist dieser notwendige Zusatz nach den vorhergehenden Betrachtungen und zufolge des geführten Beweises beinahe selbstverständlich."

---

[1]) Auch hier ist die Bedingung hinreichend. Die Bedingung $d\varkappa = 0$ und die *Lindelöf*sche Bedingung sind also bei unabhängig veränderlichen Flächen völlig gleichwertig.

[2]) Marburger Sitzungsber. 1880, S. 55.

Indessen ist der *Lindelöf*sche Satz vollkommen richtig; der Zusatz, den *Hess* für notwendig hält, ist nicht nur überflüssig, sondern gibt sogar einen falschen Satz. Der Widerspruch, den *Hess* bemerken will, ist nicht vorhanden; denn *Lindelöf*s Satz will ja gar nicht besagen, daß ein Polyeder, das die angegebene Eigenschaft hat, das beste unter allen von gleicher Flächenzahl sei, es braucht auch nicht, wie *Hess* annimmt, das beste unter den Polyedern vom selben Typus zu sein, wie wir weiter unten (§ 5 ff.) sehen werden. Natürlich ist es auch nicht statthaft, aus dem *Lindelöf*schen Satze Schlüsse auf die *regulären Polyeder* zu ziehen. Es liegt ja nach den Erfahrungen aus der ebenen Geometrie und beim Tetraeder der Gedanke sehr nahe, es möchte jedes reguläre Polyeder unter den Polyedern gleicher Flächenzahl das beste sein. Allein eine nähere Betrachtung läßt leicht erkennen, daß für eine solche Vermutung keine Grundlage besteht. Man könnte zunächst mit gleichem Rechte dieselbe Vermutung bezüglich der Polyeder von gleicher Eckenzahl hegen; sie würde sich allerdings sehr bald als falsch erweisen. Die Anordnung der regulären Polyeder nach abnehmenden Werten von $\varkappa$ stimmt mit der Anordnung nach zunehmender Flächenzahl überein. Die Anzahlen der Ecken bei dieser Anordnung werden dagegen 4, 8, 6, 20, 12. Es gibt also Polyeder mit nur 6 Ecken und daher natürlich auch solche mit 8 Ecken, die besser sind als der Würfel. Aber weiter lehrt die Gleichung (4), daß auch nicht jedes reguläre Polyeder besser ist als jedes andere von gleicher Flächenzahl; denn diese Gleichung zeigt uns, *daß es zum wenigsten ein 8-flächiges Polyeder gibt, das bei gleicher Oberfläche auch dasselbe Volumen wie das reguläre Oktaeder hat, nämlich dar beste 6-seitige Prisma* [1]). Diese von *E. Hess* hervorgehobene Tatsache dürfte auch *Steiner* bekannt und der Anlaß dazu gewesen sein, daß er nur annimmt, es seien *reguläres Polyeder*, *Dodekaeder* und *Ikosaeder* die besten Polyeder innerhalb ihrer Typen [2]). Für einen Beweis dieser Annahme ist auch nicht einmal ein schwacher Ansatz vorhanden, und da nach den Erfahrungen auf diesem Gebiete größte Zurückhaltung im Aussprechen von Vermutungen zu empfehlen ist, müssen wir diese Frage, insbesondere soweit sie Dodekaeder und Ikosaeder betrifft, als noch gänzlich ungeklärt bezeichnen.

§ 4.

Wir knüpfen in dieser Arbeit an verschiedene *Steiner*sche Vermutungen (s. § 1) an. Zunächst soll die bezüglich der Prismen zu stellende Frage behandelt werden: „Ist das beste n-seitige Prisma zugleich das beste Polyeder innerhalb seines Typus?“ Es trifft dies, wie bei anderer Gelegenheit ausgeführt werden soll, im Falle $n = 3$ tatsächlich zu. Wie es sich in den Fällen $n = 4, 5, 6, 7$ verhält, bleibt dahingestellt. Hier werden wir zeigen, daß die *Steiner*sche Vermutung für jedes $n \geqq 8$ unrichtig ist, daß es also für jedes $n \geqq 8$ Polyeder vom Typus des n-seitigen Prismas gibt, die ein größeres Volumen besitzen als jedes n-seitige Prisma von gleicher Oberfläche [3]). Die Fortsetzung dieses Artikels, die der nächste Band dieses Journals

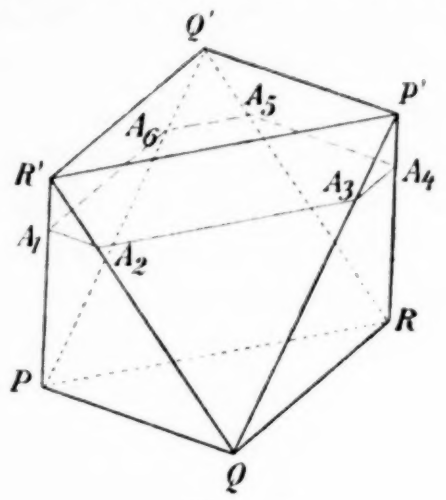
[1]) Übrigens gibt es auch 8-Flache die besser als das reguläre Oktaeder sind.

[2]) Werke 2, S. 295.

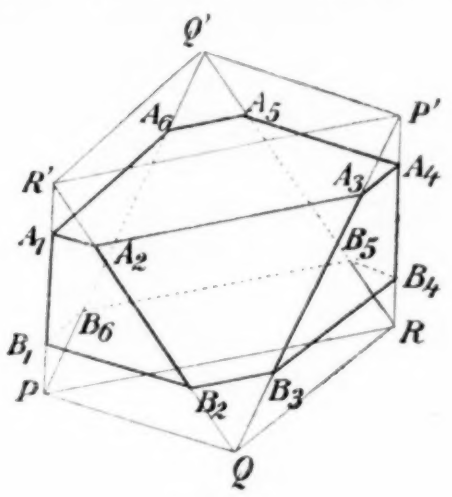
[3]) Damit ist nicht ausgeschlossen, daß für das beste n-seitige Prisma ein *relatives* Minimum von $\varkappa$ auch innerhalb des Typus eintritt. Wir haben hier überall nur das absolute Minimum im Auge.

bringen wird, behandelt zwei allgemeinere Probleme: erstens die Frage, ob innerhalb jedes Polyedertypus ein bestes Polyeder existieren muß, und zweitens, ob in allen Fällen, wo ein solches existiert, dieses stets der *Lindelöf*schen Bedingung genügt. Es wird gezeigt werden, daß beide Fragen zu verneinen sind [1]).

Wir haben schon oben auf die merkwürdige durch die Gleichung $B_4 = C_6$ ausgedrückte Tatsache hingewiesen. Gerade diese hat mir die *Steiner*sche Vermutung zuerst verdächtig gemacht. — Betrachten wir ein reguläres Oktaeder mit den beiden Parallelflächen $\alpha = PQR$, $\beta = P'Q'R'$ (s. Fig. 1 u. 2), deren Abstand



Figur 1.



Figur 2.

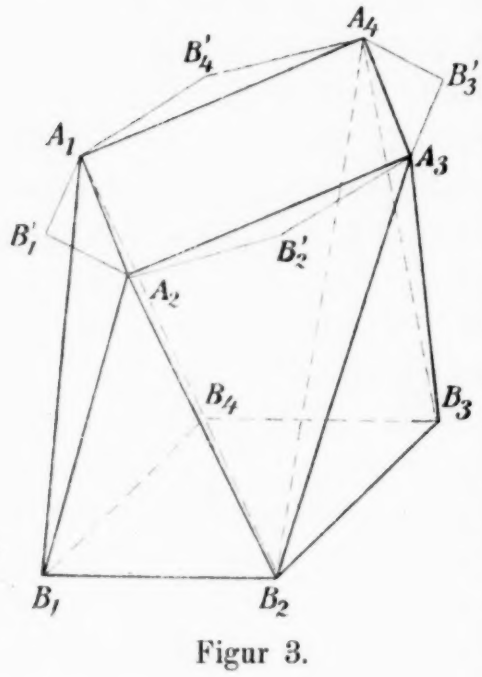
wir mit h bezeichnen. Jede zu den Flächen α, β parallele und zwischen ihnen gelegene Ebene schneidet aus dem Oktaeder ein halbreguläres Sechseck aus. Nehmen wir zwei solche Ebenen α', β' an, so ist der von ihnen begrenzte Teil des Oktaeders ein von zwei Sechsecken $A_1, \ldots, A_6$, $B_1, \ldots, B_6$ und sechs Vierecken $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2, \ldots, A_6A_1B_1B_6$ umschlossenes konvexes Polyeder, also ein Polyeder $\mathfrak{P}$ vom Typus des sechsseitigen Prismas. Es mögen α und α', ebenso β und β' den Abstand $\delta < h/2$ haben. Lassen wir, während das Oktaeder festgehalten wird, δ sich verkleinern und Null werden, so geht das Polyeder $\mathfrak{P}$ in das Oktaeder über und der zu $\mathfrak{P}$ gehörige Wert von $\varkappa$ in den Wert C_4, so daß für hinlänglich kleines δ $\varkappa$ von C_4 beliebig wenig verschieden ist. Wäre C_4 nicht gleich B_6, sondern auch nur um ein weniges kleiner, das Oktaeder also besser als das beste 6-seitige Prisma, so würde für hinlänglich kleines δ auch $\mathfrak{P}$ besser sein als dieses Prisma, und die *Steiner*sche Annahme wäre bereits für den Fall $n = 6$ als unrichtig nachgewiesen. Nun ist zwar eben nicht $C_4 < B_6$, sondern $C_4 = B_6$, aber diese Betrachtungen lassen doch schon einen Weg erkennen, auf dem man erwarten kann, zunächst für den Fall eines geraden $n > 6$ die *Steiner*sche Annahme zu widerlegen.

Zu diesem Zweck werden wir gewisse sehr spezielle Polyeder betrachten, die wir „*Antiprismen*“ nennen [2]). In einer Ebene ε, die wir uns horizontal vorstellen wollen, liege das reguläre $2m$-Eck $A_1B_1'A_2B_2', \ldots, A_mB_m'$. $\alpha = A_1, \ldots, A_m$,

[1]) Die die Prismentypen betreffenden Tatsachen sind mir seit 11 Jahren bekannt und (ohne Beweis) bereits in meinem Enzyklopädieartikel III AB 12 Nr. 16 mitgeteilt. Die Erledigung der beiden zuletzt erwähnten allgemeineren Probleme ist mir aber erst kürzlich gelungen.

[2]) Diese Bezeichnung ist wohl auch sonst üblich, wenn sie auch nicht immer genau im gleichen Sinne gebraucht wird.

$\beta' = B'_1, \ldots, B'_m$ sind dann kongruente reguläre m-Ecke. Indem wir β' auf eine zu ε parallele Ebene ε' im Abstande h projizieren, erhalten wir in ihr ein kongruentes reguläres m-Eck $\beta = B_1, \ldots, B_m$. α und β begrenzen im Verein mit den $2m$ Dreiecken $A_1 A_2 B_1$, $B_1 B_2 A_2$, $A_2 A_3 B_2$, $B_2 B_3 A_3, \ldots$ $A_m A_1 B_m$, $B_m B_1 A_1$ ein konvexes Polyeder (s. Fig. 3). Dieses ist unser „*Antiprisma*“ $\mathfrak{A}_m$. Es sei r der Radius des der Grundfläche α umbeschriebenen Kreises. Durch h und r ist $\mathfrak{A}_n$ nach Form und Größe bestimmt, durch das Verhältnis $h : r$ bereits seiner Form nach; der Wert, den $\varkappa$ für $\mathfrak{A}_m$ annimmt, hängt also (außer vom m) nur von diesem Verhältnis ab. Er wird unendlich groß, sowohl wenn dieses Verhältnis unendlich klein, als auch wenn es unendlich groß wird; denn wenn wir bei festgehaltener Grundfläche h unendlich klein werden lassen, so wird das Volumen unendlich klein, während die Oberfläche F dem doppelten Inhalt der Grundfläche als Grenzwert zustrebt. Lassen wir dagegen h unendlich groß werden, so werden F und V von derselben Ordnung wie h unendlich groß, und daher wird $\frac{F^3}{V^2}$ unendlich groß. Es wird also (wenigstens) einen Wert von $\frac{h}{r}$ geben, für den $\varkappa$ sein Minimum hat, das wir S_m nennen wollen; wir haben dann *das beste Antiprisma* $\mathfrak{A}_m$. Nehmen wir wieder parallel zu den Grundflächen α, β und zwischen ihnen liegend zwei Ebenen α', β' in einem Abstand $\delta < \frac{h}{2}$ von α bzw. β an, so ist der von ihnen begrenzte Teil des Antiprismas ein von zwei halbregulären $2m$-Ecken und $2m$ gleichschenkligen Paralleltrapezen begrenztes Polyeder P, das also mit einem $2m$-seitigen Prisma isomorph ist. Lassen wir δ nach Null konvergieren, so geht $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{A}_m$ über. Hieraus folgt, daß es Polyeder vom Typus des $2m$-seitigen Prismas geben muß, für welche $\varkappa$ dem Werte S_m beliebig nahe kommt.



Figur 3.

Wir können unsere Erklärung des Antiprismas auch schon für $m = 2$ gelten lassen. An die Stelle der Grundflächen α, β treten dann zwei gleichlange Strecken, die zueinander windschief und rechtwinklig sind und auf der Verbindungsgeraden ihrer Mitten senkrecht stehen; $\mathfrak{A}_2$ wird ein von vier kongruenten gleichschenkligen Dreiecken begrenztes Tetraeder, das beste $\mathfrak{A}_2$ ein reguläres Tetraeder. Mithin $S_2 = A_3 > B_4 = B_{2.2}$. Im Falle $m = 3$ wird $\mathfrak{A}_3$ vom Typus des regulären Oktaeders; das beste $\mathfrak{A}_3$ ist selbst ein reguläres Oktaeder und mithin $S_3 = C_4 = B_6 = B_{2.3}$. *Im Falle $m > 3$ ist aber*, wie wir nachweisen werden, $S_m < B_{2.m}$. Damit wird auch die Existenz von Polyedern vom Typus des $2m$-seitigen Prismas erbracht sein, für welche $\varkappa < B_{2.m}$ ist; und das zu zeigen, ist ja unsere Aufgabe.

---

[1]) Daß tatsächlich nur ein Minimum auftritt zeigt die folgende Berechnung.

§ 6.

Um in die folgenden Rechnungen bequemer einzuführen, wollen wir hier eine kurze Ableitung für das beste n-seitige Prisma angeben. Es sei zunächst ein beliebiges n-seitiges Prisma gegeben. Ist es ein schiefes Prisma, so erfährt, wenn wir es durch ein gerades Prisma mit derselben Grundfläche und gleicher Höhe ersetzen, das Volumen keine Änderung, während der Mantel und somit auch die gesamte Oberfläche verkleinert wird. Hat das gerade Prisma keine reguläre Grundfläche, so ersetzen wir es durch ein gerades Prisma mit gleicher Höhe und inhaltsgleicher aber regulärer Grundfläche. Da hierbei der Umfang der Grundfläche verkleinert wird, so wird auch der Mantel sowie die gesamte Oberfläche verkleinert; das Volumen bleibt aber wieder unverändert. Es handelt sich also jetzt nur noch darum, unter allen geraden n-seitigen Prismen mit regulärer Grundfläche dasjenige mit dem Minimalwert von $\varkappa$ zu ermitteln. Es sei ϱ der Radius des der Grundfläche einbeschriebenen Kreises, h die Höhe des Prismas. Dann wird die Kantenlänge der Grundfläche $2\varrho \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, ihr Umfang $2n \cdot \varrho \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, ihr Inhalt $n \cdot \varrho^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, die Oberfläche des Prismas

$$F = 2n \cdot \varrho^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} + 2n\varrho \cdot h \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = 2n\varrho\,(\varrho + h) \operatorname{tg}\frac{\pi}{n},$$

das Volumen

$$V = n\varrho^2 h \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Für $\varkappa$ ergibt sich somit

$$\varkappa = 8n \cdot \frac{(\varrho + h)^3}{\varrho \cdot h^2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = 8n \cdot \frac{(1 + \omega)^3}{\omega^2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n},$$

wo $\frac{h}{\varrho} = \omega$ gesetzt wurde.

Es kommt darauf an, den Wert des Verhältnisses ω so zu bestimmen, daß der Ausdruck $\frac{(1 + \omega)^3}{\omega^2}$ ein Minimum wird. Durch Differenzieren nach ω erhalten wir $\frac{(1 + \omega)^2}{\omega^3} \cdot (\omega - 2)$. Die einzige positive Nullstelle dieser Ableitung ist $\omega = 2$, und da die Ableitung an dieser Stelle vom Negativen zum Positiven übergeht, so haben wir hier die Stelle des Minimums von $\varkappa$. Dieses tritt also ein für $\omega = 2$, $h = 2\varrho$, d. h. wenn sich in das Prisma eine Kugel einbeschreiben läßt; und der Minimalwert von $\varkappa$ wird

$$8n \cdot \frac{27}{4} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = 54n \operatorname{tg}\frac{\pi}{n},$$

also gleich dem früher angegebenen Werte B_n.

Wir betrachten jetzt ein Antiprisma $\mathfrak{A}_m$.

Es sei r der Radius des seiner Grundfläche umbeschriebenen Kreises, ϱ der Radius des einbeschriebenen Kreises, s die Kante der Grundfläche, h' die bezüglich der Basis genommene Höhe in den begrenzenden gleichschenkligen Dreiecken, h die Höhe des Körpers $\mathfrak{A}_m$. Dann ist

$$(5)\quad \begin{cases} \varrho = r\ \cos\dfrac{\pi}{m}, \quad h' = \sqrt{(r-\varrho)^2 + h^2} = \sqrt{r^2\left(1-\cos\dfrac{\pi}{m}\right)^2 + h^2} \\ s = 2r\sin\dfrac{\pi}{m}. \end{cases}$$

Der Inhalt jeder Grundfläche wird $\frac{1}{2}\, m\varrho s = mr^2 \sin\frac{\pi}{m}\cdot\cos\frac{\pi}{m}$, der Inhalt jedes begrenzenden Dreiecks

$$\frac{1}{2}\, sh' = r\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{r^2\left(1-\cos\frac{\pi}{m}\right)^2 + h^2}\,.$$

Für die Oberfläche F ergibt sich daher:

$$(6)\quad F = 2m\cdot r\sin\frac{\pi}{m}\cdot\left(r\cos\frac{\pi}{m} + \sqrt{r^2\left(1-\cos\frac{\pi}{m}\right)^2 + h^2}\right).$$

Die zu den Grundflächen parallele Ebene in der Mitte zwischen den beiden Grundflächen schneidet aus $\mathfrak{A}_m$ ein reguläres $2m$-Eck von der Kantenlänge $\frac{s}{2}$ aus. Der Inhalt M dieser Fläche ist

$$M = 2m\cdot\frac{s}{4}\cdot\frac{s}{4}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2m} = \frac{1}{2}\, mr^2\sin^2\frac{\pi}{m}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2m}$$
$$= \frac{1}{2}\, mr^2\sin\frac{\pi}{m}\cdot\left(1+\cos\frac{\pi}{m}\right).$$

Das Volumen V von $\mathfrak{A}_m$ wird nach einem bekannten elementargeometrischen Satze erhalten, indem man zu 4 M die Inhalte der beiden Grundflächen hinzufügt und diese Summe mit $\frac{h}{6}$ multipliziert. Man erhält daher

$$(7)\qquad V = \frac{1}{3}\, mr^2 h\sin\frac{\pi}{m}\cdot\left(1+2\cos\frac{\pi}{m}\right).$$

Aus (6) und (7) folgt

$$(8)\qquad \frac{F^3}{V^2} = \frac{72\, m\sin\dfrac{\pi}{m}}{\left(1+2\cos\dfrac{\pi}{m}\right)^2}\cdot\frac{\left(r\cos\dfrac{\pi}{m} + \sqrt{r^2\left(1-\cos\dfrac{\pi}{m}\right)^2 + h^2}\right)^3}{rh^2}$$

oder

$$(9)\qquad \frac{F^3}{V^2} = \frac{72\, m\sin\dfrac{\pi}{m}}{\left(1+2\cos\dfrac{\pi}{m}\right)^2}\cdot Q,$$

wo

$$(10)\qquad Q = \frac{\left(r\cos\dfrac{\pi}{m} + \sqrt{r^2\left(1-\cos\dfrac{\pi}{m}\right)^2 + h^2}\right)^3}{rh^2}$$

gesetzt ist.

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\cos\frac{\pi}{m} = u, \quad u + \sqrt{(1-u)^2 + \left(\frac{h}{r}\right)^2} = w, \tag{11}$$

so wird

$$Q = \frac{w^3}{\left(\frac{h}{r}\right)^2}, \qquad (w-u)^2 = (1-u)^2 + \left(\frac{h}{r}\right)^2,$$

$$\left(\frac{h}{r}\right)^2 = w^2 - 2uw + 2u - 1, \tag{12}$$

also

$$Q = \frac{w^3}{w^2 - 2uw + 2u - 1}. \tag{13}$$

Der Wert von $\frac{F^3}{V^2}$ hängt, wenn m und somit auch $u = \cos\frac{\pi}{m}$ gegeben ist, nur von dem Verhältnis $h : r$ ab, welches jeden positiven Wert haben kann. Lassen wir nun dieses Verhältnis alle positiven Werte wachsend durchlaufen, so durchläuft w, wie die Gleichung (11) zeigt, ebenfalls wachsend alle Werte > 1. Unsere Aufgabe ist es, denjenigen Wert $w > 1$ zu bestimmen, für welchen Q und somit $\frac{F^3}{V^2}$ ein Minimum wird. Durch Differenzieren der Gleichung (12) erhalten wir

$$\frac{dQ}{dw} = \frac{w^2(w^2 - 4uw + 6u - 3)}{(w^2 - 2uw + 2u - 1)^2}.$$

Die Nullstellen von $w^2 - 4uw + 6u - 3$ sind

$$w = 2u \pm \sqrt{4u^2 - 6u + 3}.$$

Da $u = \cos\frac{\pi}{m} < 1$ ist, wird, wie eine einfache Umrechnung zeigt,

$$2u - \sqrt{4u^2 - 6u + 3} < 1.$$

Diese Nullstelle, welche ein Maximum liefern würde, kommt daher gar nicht in Betracht. Die andere — wir wollen sie v oder, wenn die Abhängigkeit von m hervorgehoben werden soll, v_m nennen — liefert das gesuchte Minimum. Dieses tritt also ein, wenn w den Wert

$$v = 2u + \sqrt{4u^2 - 6u + 3} = 2u + \sqrt{\left(2u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \tag{14}$$

annimmt. Setzen wir diesen Wert anstelle von w in Q ein, so erhalten wir nach den Gleichungen (9) und (12) für den gesuchten Minimalwert S_m von $\frac{F^3}{V^2}$ den Ausdruck

$$S_m = 72m \cdot \sin\frac{\pi}{m} \cdot \frac{v^3}{(1+2u)^2 \cdot (v^2 - 2uv + 2u - 1)}. \tag{15}$$

Die Einführung der Größe v bietet den Vorteil, daß sich der in (15) auftretende Quotient als rationale Funktion von v allein darstellen läßt. Aus der Gleichung (14) folgt:

$$(v - 2u)^2 = 4u^2 - 6u + 3,$$

$$u = \frac{v^2 - 3}{4v - 6}, \tag{16}$$

$$1 + 2u = \frac{v^2 + 2v - 6}{2v - 3}. \tag{17}$$

Aus (12) und (16) ergibt sich im Falle des besten $\mathfrak{A}_m$:

$$\left(\frac{h}{r}\right)^2 = v^2 - 2uv + 2u - 1 = \frac{v(v-1)^2}{2v-3}. \tag{18}$$

Aus (15), (17), (18) erhalten wir endlich für S_m den für die weiteren Untersuchungen brauchbarsten Ausdruck

$$\begin{aligned} S_m &= 72m \sin\frac{\pi}{m} \cdot \frac{v^2(2v-3)^3}{(v^2+2v-6)^2(v-1)^2} \\ &= 72m \sin\frac{\pi}{m} \cdot \frac{v^2(2v-3)^3}{[(v+1+\sqrt{7})(v+1-\sqrt{7})(v-1)]^2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Will man S_m ganz allein als Funktion von v darstellen, so hat man

$$\begin{aligned} \sin\frac{\pi}{m} &= \sqrt{1-u^2} = \sqrt{27 - 48v + 22v^2 - v^4} : (4v-6) \\ &= \sqrt{(v-1)(3-v)(v+2+\sqrt{13})(v+2-\sqrt{13})} : (4v-6) \end{aligned}$$

und schließlich

$$m = \frac{\pi}{\arccos u} = \frac{\pi}{\arccos \dfrac{v^2-3}{4v-6}}$$

zu setzen.

Es empfiehlt sich aber, bei dem Ausdruck (19) stehen zu bleiben.

Es war $u = \cos\frac{\pi}{m}$, wo m nur natürliche Werte annimmt. Sehen wir aber u für den Augenblick als eine unbeschränkte reelle Veränderliche an und betrachten v als durch die Gleichung (14), in der die Wurzel stets positiv genommen werden soll, definiert, so folgt Gleichung (16) und aus dieser

$$\frac{du}{dv} = \frac{v^2 - 3v + 3}{(2v-3)^2} = \frac{\left(v - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{(2v-3)^2}.$$

Man ersieht daraus, daß u und v eindeutige Funktionen voneinander sind, und daß zugleich mit der einen dieser Größen auch die andere wächst. Aus (14) und (16) folgt weiter

$$\sqrt{4u^2 - 6u + 3} = v - 2u = \frac{(2v^2 - 6v + 6)}{(4v-6)} = \frac{\left(v - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{(2v-3)}.$$

Da die Wurzel positiv ist, kann, wie die letzte Gleichung zeigt, v nur Werte $> \frac{3}{2}$ annehmen. Man sieht auch, daß wenn v alle Werte $> \frac{3}{2}$ durchläuft, u das ganze reelle Gebiet durchläuft. Nehmen wir wieder $u = \cos\frac{\pi}{m}$ an, und lassen

wir m durch alle reellen Zahlen von 2 bis $+\infty$ gehen, so geht u ständig wachsend von 0 bis 1, v ständig wachsend von $\sqrt{3}$ bis 3. Insbesondere ergeben sich die folgenden zusammengehörigen Werte von m, u, v:

$$(20)\qquad \begin{cases} m=\frac{3}{2}, & u=-\frac{1}{2}, & v=-1+\sqrt{7}, \\ m=2, & u=0, & v=\sqrt{3}, \\ m=3, & u=\frac{1}{2}, & v=2, \\ m=4, & u=\frac{1}{2}\sqrt{2}, & v=\sqrt{2}+\sqrt{5-3\sqrt{2}}, \\ m=6, & u=\frac{1}{2}\sqrt{3}, & v=\sqrt{3}+\sqrt{6-3\sqrt{3}}, \\ m=\infty, & u=1, & v=3. \end{cases}$$

§ 7.

Der Wert $-1+\sqrt{7}$, den v für $m=\frac{3}{2}$ annimmt, ist die größte Nullstelle im Nenner des Quotienten auf der rechten Seite der Gleichung (19). Wenn wir also diese Gleichung als Definition von S_m für beliebige reelle m ansehen, so hat S_m für jedes $m>\frac{3}{2}$ einen bestimmten endlichen Wert. Für $m=2$ wird $\sin\frac{\pi}{m}$ gleich $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, und wenn wir den zugehörigen Wert $v=\sqrt{3}$ in (19) einsetzen, erhalten wir

$$S_2=216\sqrt{3}=72\cdot 3\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=A_3,$$

was mit unserm frühern Ergebnis, wonach das beste $\mathfrak{A}_2$ das reguläre Tetraeder ist, übereinstimmt.

Für $m=3$ erhalten wir $v=2$, $\sin\frac{\pi}{m}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, und es wird

$$S_3=108\sqrt{3}=B_6=C_4,$$

wie wir ebenfalls von früher her wissen.

Für $m=\infty$ wird $v=3$, und da $\lim\limits_{m\to\infty} m\sin\frac{\pi}{m}=\pi$ ist, so ergibt sich nach (19)

$$S_\infty=72\pi\cdot\frac{3}{4}=54\pi=B_\infty.$$

Um allgemein S_m mit B_{2m} vergleichen zu können, setzen wir in unserer Formel $B_n=54\,n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ $\quad n=2m$, was

$$B_{2m}=108\,m\operatorname{tg}\frac{\pi}{2m}=108\,m\,\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{1+\cos\frac{\pi}{m}}$$

ergibt, und führen wieder $u = \cos\frac{\pi}{m}$, $v = 2u + \sqrt{4u^2 - 6u + 3}$ ein, wonach $u = \frac{v^2 - 3}{4v - 6}$, $1 + u = \frac{v^2 + 4v - 9}{4v - 6}$, also

$$B_{2m} = 108\, m \sin\frac{\pi}{m} \cdot \frac{2(2v - 3)}{v^2 + 4v - 9} \tag{21}$$

wird.

Hier hat v dieselbe Bedeutung wie in Gleichung (19). Aus (19) und (21) folgt jetzt:

$$\frac{S_m}{B_{2m}} = \frac{v^2(2v - 3)^2(v^2 + 4v - 9)}{3(v^2 + 2v - 6)^2(v - 1)^2} = \frac{Z}{N},$$

wo $Z = v^2(2v - 3)^2(v^2 + 4v - 9)$

$N = 3(v^2 + 2v - 6)^2(v - 1)^2$ ist.

Für $m = 3$ und $m = \infty$ — oder, was dasselbe besagt — für $v = 2$ und $v = 3$ müssen Z und N einander gleich sein. Das Polynom $N - Z$ muß also die Linearfaktoren $(v - 2)$ und $(v - 3)$ enthalten.

In der Tat ergibt sich

$$\begin{aligned} N - Z &= -v^6 + 2v^5 + 30v^4 - 156v^3 + 309v^2 - 288v + 108 \\ &= -(v - 2)(v - 3)(v^4 + 3v^3 - 21v^2 + 33v - 18) \\ &= -(v - 2)(v - 3)\{(v - 2)^4 + 11(v - 2)^3 + 21(v - 2)^2 + 17(v - 2) + 4\}. \end{aligned}$$

Wie man aus dem letzten Ausdruck erkennt, ist $N - Z$ für alle Werte von v zwischen 2 und 3 positiv. Diese Werte entsprechen aber den endlichen Werten $m > 3$. *Mithin ist für jedes* $m > 3$ $Z < N$ *und somit* $S_m < B_{2m}$, was zu beweisen war.

§ 8.

Die Behauptung, daß für $n \geqq 8$ *das beste n-seitige Prisma nicht das beste Polyeder seines Typus ist, ist jetzt für gerades n bewiesen.* Wir können sie etwas anders formulieren: Bezeichnen wir mit λ_n *die untere Grenze des Wertes von* $\varkappa$ *im Bereiche der Polyeder vom Typus des n-seitigen Prismas*, so lautet die Behauptung:

$$\lambda_n < B_n \qquad (n \geqq 8). \tag{22}$$

Der Beweis für gerades $n = 2m$ wurde geführt, indem einerseits durch die Tatsache, daß das Antiprisma $\mathfrak{A}_m$ einen Grenzfall eines Polyeders vom Typus des $2m$-seitigen Prismas darstellt, die Ungleichung

$$\lambda_{2m} \leqq S_m,$$

andrerseits durch unsere letzten Untersuchungen die Ungleichung

$$S_m < B_{2m}$$

bewiesen wurde.

Berechnet man nun S_4, indem man in (19)

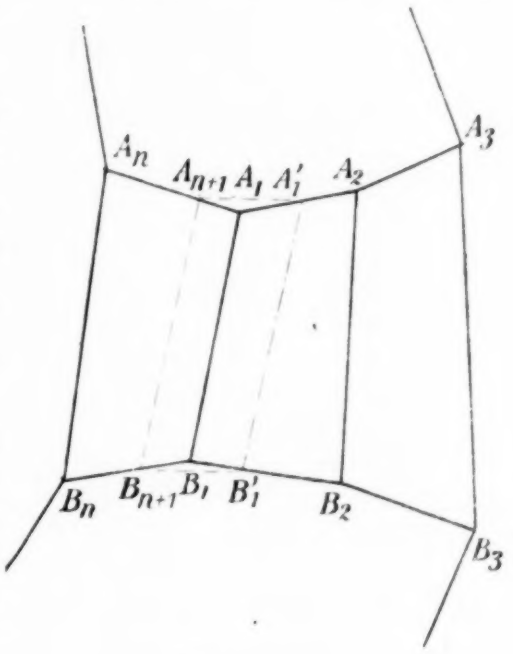
$$m = 4 \text{ und } v = v_4 = \sqrt{2} + \sqrt{5 - 3\sqrt{2}} = 2{,}28448$$

einsetzt, so erhält man

$$S_4 = 173{,}40.$$

Das ist in der Tat kleiner als B_8. Unsere Tabelle auf S. 132 zeigt sogar, daß S_4 in der Reihe der abnehmenden Werte B_k seinen Platz erst zwischen B_{12} und B_{13} einnimmt. Da allgemein $\lambda_{2m} \leqq S_m$ ist, so folgt $\lambda_8 \leqq S_4 < B_{12}$, d. h. es gibt Polyeder vom Typus des 8-seitigen Prismas, die besser sind als das beste 12-seitige Prisma. Dies zeigt uns an, wie man den Beweis von (22) auf ungerade n wird ausdehnen können.

Betrachten wir irgendein Polyeder $\mathfrak{P}_n$ vom Typus des n-seitigen Prismas, für welches $\varkappa < \lambda_n + \varepsilon$ ist, wo ε eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet. $\mathfrak{P}_n$ habe das Schema (3) (s. § 1). In den Kanten A_1A_2, B_1B_2 nehmen wir die festen Punkte A_1', B_1', in der Kante A_nA_1 den variablen Punkt A_{n+1} an, der von A_n nach A_1 laufen soll (s. Figur 4).



Figur 4.

Die variable Verbindungsebene ξ der Punkte $A_1'B_1'A_{n+1}$ schneidet die Gerade B_nB_1 in einem Punkte B_{n+1}, der, wenn A_{n+1} nahe genug an A_1 herangerückt ist, sicher innerhalb der Kante B_nB_1 liegt; sie begrenzt dann im Verein mit den übrigen Ebenen von $\mathfrak{P}_n$ ein Polyeder $\mathfrak{P}_{n+1}$ vom Typus des $(n+1)$-seitigen Prismas. Wenn am Ende seiner Bewegung A_{n+1} in A_1 anlangt, geht $\mathfrak{P}_{n+1}$ in $\mathfrak{P}_n$ über; der Wert, den $\varkappa$ für $\mathfrak{P}_{n+1}$ hat, ist daher, wenn A_{n+1} nahe genug an A_1 liegt, ebenfalls $< \lambda_n + \varepsilon$. Hieraus folgt, daß $\lambda_{n+1} \leqq \lambda_n$ ist, daß also die Folge der Werte λ_n jedenfalls nirgends zunehmen kann. Da andrerseits die B_n eine abnehmende Folge bilden, so ergibt sich aus der bewiesenen Ungleichung $\lambda_8 < B_{12}$, daß die Ungleichung (22) für $n = 8, 9, 10, 11, 12$ zutrifft.

Für $m = 6$ erhält man $v = \sqrt{3} + \sqrt{6 - 3\sqrt{3}} = 2{,}62863$, $S_6 = 170{,}14$, also $B_{33} > S_6 > B_{34}$ (s. S. 132). Damit ergibt sich die Richtigkeit der Ungleichung (22) für die Werte der Zahl n bis $n = 34$. — Die Ungleichung wird allgemein bewiesen sein, wenn gezeigt ist, daß $S_m < B_{2m+1}$ $(m \geqq 4)$ ist.

§ 9.

Wir wollen zunächst zeigen, daß der Wert S_m, den wir wieder durch die Gleichung (19) oder (15) für alle reellen m definieren, und der, wie wir sahen, für alle $m > \frac{3}{2}$ endlich und positiv, für $m = \frac{3}{2}$ unendlich, für $m = \infty$ gleich 54π ist, wenn m von $\frac{3}{2}$ aufwärts bis $+\infty$ geht, monoton abnimmt.

Zu diesem Zweck nehmen wir mit dem durch (15) gegebenen Ausdruck eine Umformung vor. Da $u = \cos\frac{\pi}{m}$ ist, erhalten wir nach (17)

$$(1+2u)^2 = (1+2u)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+2u)^{\frac{3}{2}} = \left(1 + 2\cos\frac{\pi}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{v^2+2v-6}{2v-3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Unter Benutzung dieser Gleichung und der Gleichung (18) gewinnen wir aus (15) für S_m den Ausdruck:

$$(23) \qquad S_m = \frac{72\,m \sin\frac{\pi}{m}}{\left(1 + 2\cos\frac{\pi}{m}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{v^2(2v-3)^{\frac{5}{2}}}{(v-1)^2(v^2+2v-6)^{\frac{3}{2}}} = X \cdot Y,$$

wo

$$(24) \qquad X = \frac{72\,m \sin\frac{\pi}{m}}{\left(1 + 2\cos\frac{\pi}{m}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad Y = \frac{v^2(2v-3)^{\frac{5}{2}}}{(v-1)^2(v^2+2v-6)^{\frac{3}{2}}}$$

ist. Für $m = \frac{3}{2}$ wird $\cos\frac{\pi}{m} = -\frac{1}{2}$, $v = -1 + \sqrt{7}$; X und Y werden hier unendlich, weil $\left(1 + 2\cos\frac{\pi}{m}\right)$ und $(v^2 + 2v - 6)$ verschwinden. Sonst aber sind X und Y in dem von uns betrachteten Gebiet überall endlich und positiv. Wir wollen zeigen, daß jeder dieser beiden Ausdrücke monoton abnimmt.

Wir führen den Beweis erst für Y. Während m von $\frac{3}{2}$ bis $+\infty$ geht, wächst v monoton von $-1 + \sqrt{7}$ bis 3. Es genügt daher, zu zeigen, daß in diesem Intervalle $\frac{d \log Y}{dv}$ negativ ist. Aus (24) ergibt sich

$$(25) \qquad \frac{d\log Y}{dv} = \frac{2}{v} + \frac{5}{2v-3} - \frac{2}{v-1} - \frac{3(v+1)}{v^2+2v-6} = \frac{-v^4 + 10v^3 - 36v^2 + 57v - 36}{v(2v-3)(v-1)(v^2+2v-6)}.$$

Der Nenner ist für $v > -1 + \sqrt{7}$ positiv; es ist also zu zeigen, daß der Zähler in unserm Intervalle negativ ist. Dieser ist

$$F(v) = -v^4 + 10v^3 - 36v^2 + 57v - 36 = (v-3)\,G(v),$$

wobei

$$G(v) = -v^3 + 7v^2 - 15v + 12$$

ist. Durch Differenzieren erhält man

$$G'(v) = -3v^2 + 14v - 15 = -3\left(v - \frac{5}{3}\right)(v-3).$$

Von den beiden Nullstellen $\frac{5}{3}$ und 3 von $G'(v)$ liefert die erste ein Minimum, die zweite ein Maximum von $G(v)$. Da aber an der Stelle des Minimums $G(v) = G\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{49}{27} > 0$ ist, so ist $G(v)$ bis zur Stelle des Maximums, also bis $v = 3$ (und noch darüber hinaus) positiv, mithin $F(v) = (v-3)G(v)$ für $v < 3$ und somit in unserm Intervall überall negativ.

Wir kommen zu X. Setzen wir

$$\frac{\pi}{m} = z,$$

so wird

$$X = \frac{72\pi \sin z}{z\,(1 + 2\cos z)^{\frac{1}{2}}}.$$

Indem m von $\frac{3}{2}$ aufwärts bis $+\infty$ läuft, geht z abnehmend von $\frac{2}{3}\pi$ nach 0. Wir haben zu zeigen, daß X mit z zugleich abnimmt, und zeigen dies, indem wir nachweisen, daß $\frac{d \log X}{dz}$ positiv ist.

Es ist

$$\frac{d \log X}{dz} = \frac{\cos z}{\sin z} - \frac{1}{z} + \frac{\sin z}{1 + 2\cos z} = \frac{\psi(z)}{z \cdot \sin z \cdot (1 + 2\cos z)}, \tag{26}$$

wo

$$\psi(z) = z \cdot \cos z \cdot (1 + 2\cos z) - \sin z \cdot (1 + 2\cos z) + z \sin^2 z$$

ist. Weiter ergibt sich

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(z) = \sin z \cdot [3 \sin z - z\,(1 + 2\cos z)] = \sin z \cdot \varphi(z).$$

Dabei ist

$$\varphi(z) = 3 \sin z - z(1 + 2\cos z),$$

$$\varphi'(z) = \cos z + 2z \sin z - 1 = 2\left(z \sin z - 2 \sin^2 \frac{z}{2}\right).$$

Da im Innern des für z in Betracht kommenden Intervalls 0 bis $\frac{2}{3}\pi$ überall $z > \sin z > \sin \frac{z}{2} > 0$ ist, so ist $\varphi'(z)$ daselbst positiv, $\varphi(z)$ nimmt also zu. Hieraus und weil $\varphi(0) = 0$ ist, folgt, daß auch $\varphi(z)$ in dem Intervall > 0 ist und daß dasselbe für $\sin z \cdot \varphi(z) = \psi'(z)$ gilt. Mithin nimmt auch $\psi(z)$ in diesem Intervall zu, und aus $\psi(z) = 0$ folgt, daß $\psi(z)$ daselbst positiv ist. Die Gleichung (26) zeigt jetzt, da der Nenner $z \cdot \sin z \cdot (1 + 2\cos z)$ positiv ist, daß X mit wachsendem z zu-, also mit wachsendem m abnimmt. — Damit ist der Beweis für das monotone Abnehmen von S_m bei wachsendem m erbracht.

Da der Ausdruck

$$B_n = 54\,n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n},$$

wenn n von 2 bis $+\infty$ läuft, ebenfalls monoton abnehmend von $+\infty$ bis 54π geht, so werden je ein $m > \frac{3}{2}$ und ein $n > 2$, die durch die Beziehung

$$B_n = S_m$$

miteinander verknüpft sind, einander eindeutig entsprechen.

§ 10.

Um nun die Ungleichung (22) auch für jeden Fall eines ungeraden $n > 8$ zu beweisen, geben wir der Gleichung (19) die Form

$$S_m = 54\,m \cdot \sin\frac{\pi}{m} \cdot R, \tag{27}$$

wo

$$R = \frac{4}{3} \cdot \frac{v^2(2v-3)^3}{(v^2+2v-6)^2(v-1)^2} \tag{27 a}$$

ist. Substituieren wir

$$3 - v = t, \tag{28}$$

so wird

$$R = \frac{972 - 2592\,t + 2700\,t^2 - 1368\,t^3 + 336\,t^4 - 32\,t^5}{972 - 2700\,t + 2955\,t^2 - 1608\,t^3 + 450\,t^4 - 60\,t^5 + 3\,t^6}. \tag{29}$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach steigenden Potenzen von t, so werden die beiden ersten Glieder der Entwicklung $1 + \frac{1}{9}t$, und man erhält

$$R = 1 + \frac{1}{9}t + \frac{Z_1}{N_1}t^2, \tag{30}$$

wobei (nach Erweiterung mit 3)

$$Z_1 = 135 - 265\,t + 194\,t^2 - 66\,t^3 + 11\,t^4 - t^5$$
$$N_1 = 2916 - 8100\,t + 8865\,t^2 - 4824\,t^3 + 1350\,t^4 - 180\,t^5 + 9\,t^6$$

ist. Daraus ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} 2N_1 - 9Z_1 &= 4617 - 13815\,t + 15984\,t^2 - 9054\,t^3 + 2601\,t^4 - 351\,t^5 + 18\,t^6 \\ &= 9(1-t)\cdot[28 + 132(1-t) + 200(1-t)^2 + 124(1-t)^3 \\ &\quad + 27(1-t)^4 + 2(1-t)^5]. \end{aligned}$$

Da für v, wenn wir $m \geqq 3$ nehmen, nur das Intervall 2 bis 3, also für t das Intervall 0 bis 1 in Frage kommt, so ist, wie der letzte Ausdruck zeigt, $2N_1 - 9Z_1 > 0$, also

$$\frac{Z_1}{N_1} < \frac{2}{9},$$

mithin nach (30) und (27)

$$S_m \leqq 54\,m \cdot \sin\frac{\pi}{m} \cdot \left(1 + \frac{1}{9}t + \frac{2}{9}t^2\right). \tag{31}$$

Nun war $v = 2u + \sqrt{4u^2 - 6u + 3}$, $u = \cos\frac{\pi}{m}$. Setzen wir also wieder $\frac{\pi}{m} = z$, so wird nach (29)

$$\begin{aligned} t &= 3 - v = 3 - 2\cos z - \sqrt{4\cos^2 z - 6\cos z + 3} \\ &= 1 + 2(1 - \cos z) - \sqrt{1 + (1-\cos z)[6 - 4(1+\cos z)]} \\ &= 1 + 4\sin^2\frac{z}{2} - \sqrt{1 + 4\sin^2\frac{z}{2}\cdot\left(3 - 4\cos^2\frac{z}{2}\right)} \\ &= 1 + 4\sin^2\frac{z}{2} - \sqrt{1 + 4\sin^2\frac{z}{2}\cdot\left(-1 + 4\sin^2\frac{z}{2}\right)} \end{aligned} \tag{32}$$

$$= 1 + 4\sin^2\frac{z}{2} - \sqrt{1 - 4\sin^2\frac{z}{2} + 16\sin^4\frac{z}{2}}$$

$$\leqq 1 + 4\sin^2\frac{z}{2} - \sqrt{1 - 4\sin^2\frac{z}{2} + 4\sin^4\frac{z}{2}}$$

$$= 1 + 4\sin^2\frac{z}{2} - \left(1 - 2\sin^2\frac{z}{2}\right)$$

$$= 6\sin^2\frac{z}{2} \leqq \frac{3}{2}z^2.$$

Also

$$t \leqq \frac{3}{2}z^2 \qquad \left(z = \frac{\pi}{m},\ m \geqq 3\right). \tag{33}$$

Ferner ist

$$54\,m\sin\frac{\pi}{m} = 54\,\pi\frac{\sin z}{z} \leqq 54\,\pi\cdot\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!}\right).$$

Aus dieser Ungleichung und den Ungleichungen (31) und (33) ergibt sich jetzt

$$S_m \leqq 54\,\pi\left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120}\right)\left(1 + \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{2}\right)$$

$$= 54\,\pi\left(1 + \frac{173}{360}z^4 - \frac{59}{720}z^6 + \frac{z^8}{240}\right)$$

$$\leqq 54\,\pi\left(1 + \frac{1}{2}\,z^4\right),$$

also

$$S_m \leqq 54\,\pi\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{m}\right)^4\right). \tag{34}$$

Für B_n erhalten wir

$$B_n = 54\,n\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = 54\,\pi\cdot\frac{\operatorname{tg} x}{x},$$

wenn $\frac{\pi}{n} = x$ gesetzt wird.

Da für n nur Werte >2 in Betracht kommen, so haben wir

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + \frac{17}{315}x^6 + \cdots.$$

Die in der Reihe auftretenden Koeffizienten sind bekanntlich positiv; es ist also

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} \geqq 1 + \frac{1}{3}x^2,$$

$$B_n \geqq 54\,\pi\cdot\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\right). \tag{35}$$

Aus (34) und (35) ergibt sich, daß wenn $S_m = B_n$ sein soll,

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 < \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{m}\right)^4,$$

d. h. $n > \frac{1}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\,m^2 > \left(\frac{m}{2}\right)^2$ oder

(36) $$m < 2\sqrt{n}$$

sein muss. Es sei jetzt $n \geqq 18$ eine ganze Zahl, $n = 2k$ oder $n = 2k+1$, je nachdem n gerade oder ungerade ist; λ_n habe die frühere Bedeutung. Dann ist

(37) $$\lambda_n \leqq \lambda_{2k} \leqq S_k.$$

Aus $n \geqq 18$ folgt:

$$(n-9)^2 \geqq 81; \qquad (n-1)^2 > 16n; \qquad n - 1 > 4\sqrt{n}.$$

Wird jetzt m durch die Gleichung $S_m = B_n$ definiert, so folgt aus (36) weiter

$$n - 1 > 4\sqrt{n} > 2m, \qquad n > 2m + 1,$$

also, da $n \leqq 2k+1$ ist, $2m+1 < 2k+1$, $k > m$,

(38) $$S_k < S_m = B_n,$$

endlich aus (37) und (38)

$$\lambda_n < B_n.$$

Damit ist die Ungleichung (22) für alle $n \geqq 18$ bewiesen. Da sie schon früher für $8 \leqq n \leqq 34$ bewiesen wurde, so gilt sie, wie behauptet war, für alle $n \geqq 8$; d. h. *für kein $n \geqq 8$ ist das beste n-seitige Prisma das beste Polyeder seines Typus.*

§ 11.

Die beiden Folgen

$$B_3, B_4, \ldots, B_n, \ldots \quad \text{und} \quad S_3, S_4, \ldots, S_n, \ldots$$

streben, wie gezeigt wurde, monoton abnehmend demselben Grenzwert 54π zu, die zweite viel rascher als die erste. Dies wollen wir noch genauer verfolgen und eine einfache Formel aufstellen, nach der wir leicht ermitteln können, wie sich die Glieder der beiden Folgen ineinander einreihen. Wir betrachten jetzt B_n und S_m als analytische Funktionen der komplexen Argumente n und m oder — indem wir $\frac{\pi}{n} = x$, $\frac{\pi}{m} = z$ setzen — der komplexen Argumente x und z. Die erste Funktion wird durch die Gleichung

$$B_n = 54\pi \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

in der ganzen komplexen Ebene als eine eindeutige Funktion von x definiert, die nur an den Stellen $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k ganz) einfache Pole, an den Stellen $x = k\pi$ mit Ausnahme von $x = 0$ einfache Nullstellen hat. Die Reihenentwicklung an der Stelle $x = 0$ beginnt mit

(39) $$B_n = 54\pi\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + \frac{17}{315}x^6 + \cdots\right),$$

konvergiert im Kreise mit dem Radius $\frac{\pi}{2}$ und stellt B_n daher für alle für die Polyeder in Betracht kommenden Werte n dar.

S_m wird durch die Gleichungen (27), (29), (28), (14), (11) definiert, und zwar wegen der auftretenden Quadratwurzel als zweideutige Funktion. Setzen wir

(40) $$\sqrt{4\cos^2 z - 6\cos z + 3} = s,$$

wobei wieder $z = \frac{\pi}{m}$ sein soll, so ist S_m eine eindeutige Funktion von z und s. s^2 ist (im Endlichen) überall regulär, und hat, da

$$\frac{d(s^2)}{dz} = -8\cos z \cdot \sin z + 6\sin z = -4\sin z\left(2\cos z - \frac{3}{2}\right)$$

und $s^2 = \left(2\cos z - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ nicht zugleich verschwinden können, nur einfache Nullstellen. Diese sind daher Verzweigungsstellen von s und zugleich die einzigen Singularitäten von s.

Um sie zu erhalten, haben wir die Gleichung

$$4\cos^2 z - 6\cos z + 3 = 0$$

nach z aufzulösen. Zunächst ergeben sich aus der Gleichung für $\cos z$ die beiden konjugiert komplexen Werte $\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4} i$. Es ist also noch die Auflösung der Gleichung

(41) $$\cos z = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4} i$$

zu leisten. Ist $z_0 = x_0 + y_0 i$ irgendein Wert, für den $\cos z_0 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i$ ist, so werden alle Lösungen der Gleichung $\cos z = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}$ in der Form $2k\pi \pm z_0$ (k ganz), alle Lösungen der Gleichung $\cos z = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i$ in der Form $2k\pi \pm \bar{z}_0$ dargestellt, wo $\bar{z}_0 = x_0 - y_0 i$ ist. Teilen wir die komplexe Zahlenebene durch Parallelen zur y-Achse, die durch die Punkte $(2k+1)\pi$ gezogen sind, in vertikale Streifen, so enthält jeder solche Streifen 4 Nullstellen von s^2. Wir wollen annehmen, daß z_0 die Nullstelle in dem den Nullpunkt enthaltenden Streifen sei, deren Koordinaten positiv sind, also $0 < x_0 < \pi$, $y_0 > 0$. Die 4 Nullstellen in diesem Streifen sind dann

$$x_0 + y_0 i, \quad -x_0 + y_0 i, \quad -x_0 - y_0 i, \quad x_0 - y_0 i$$

und liegen auf dem Kreise mit dem Radius $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ um den Nullpunkt. Ebenso liegen die Nullstellen in dem Streifen mit dem Punkte $k\pi$, nämlich $(2k\pi \pm x_0) \pm y_0 i$ ($k \gtrless 0$), auf dem Kreise mit dem Radius r_0 um diesen Punkt. Sie haben, da (wegen $0 < x_0 < \pi$) $|2k\pi \pm x_0| > \pi > x_0$ ist, einen absoluten Wert $> r_0$. Jeder der betrachteten Kreise zerfällt durch die 4 auf ihm gelegenen Verzweigungspunkte in 4 Bögen; von diesen wollen wir immer nur die in Betracht ziehen, welche die x-Achse nicht schneiden. Über der z-Ebene denken wir uns 2 Blätter ausgebreitet, die wir längs der zuletzt bezeichneten Bögen aufschneiden und dann in bekannter Weise miteinander verknüpfen. Wir erhalten so eine *Riemann*sche Fläche $\mathfrak{R}$ für s. Die beiden Blätter unterscheiden wir als oberes und unteres. Als oberes Blatt soll das gelten, welches den Punkt $z = 0$, $s = +1$ enthält. Es bezeichnet dann s für alle reellen z im oberen Blatt die positive, im untern Blatt die negative Quadratwurzel aus $4\cos^2 z - 6\cos z + 3$.

Da z_0 die Gleichung (41) befriedigt, so ist

$$\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}\, i = \cos z_0 = \frac{1}{2}\,(e^{-z_0 i} + e^{z_0 i}) = \frac{1}{2}\,(e^{y_0 - x_0 i} + e^{-y_0 + x_0 i})$$

$$= \frac{1}{2}\cos x_0 \cdot (e^{y_0} + e^{-y_0}) - \frac{i}{2}\sin x_0 \cdot (e^{y_0} - e^{-y_0}).$$

Die Vergleichung des reellen und imaginären Bestandteils ergibt, da $0 < x_0 < \pi$, $y_0 > 0$ und somit $\sin x_0 > 0$, $e^{y_0} - e^{-y_0} > 0$ ist,

$$\cos x_0 \cdot (e^{y_0} + e^{-y_0}) = \frac{3}{2}, \qquad \sin x_0 \cdot (e^{y_0} - e^{-y_0}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mithin ist $\cos x_0 > 0$, $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$. Setzen wir

$$e^{y_0} + e^{-y_0} = p, \qquad e^{y_0} - e^{-y_0} = q,$$

so folgt

$$p^2 - q^2 = 4, \qquad p > q > 0,$$

$$\cos x_0 = \frac{3}{2p}, \qquad \sin x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2q}.$$

Durch Quadrieren und Addieren erhält man

$$1 = \frac{9}{4p^2} + \frac{3}{4q^2} = \frac{9}{4(q^2+4)} + \frac{3}{4q^2},$$

$$q^4 + q^2 = 3,$$

$$q^2 = \frac{\sqrt{13} - 1}{2}, \qquad p^2 = \frac{\sqrt{13} + 7}{2}.$$

Die positiven Größen p und q sind dadurch bestimmt. Es ergibt sich dann weiter

$$e^{y_0} = \frac{p+q}{2}, \qquad y_0 = \log\frac{p+q}{2}.$$

x_0 gewinnt man aus

$$\sin x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2q}, \qquad 0 < x_0 < \frac{\pi}{2};$$

endlich wird

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Die numerische Berechnung ergibt

$$p = 2,3028, \qquad q = 1,1414,$$

$$x_0 = 0,8615, \qquad y_0 = 0,5435, \qquad r_0 = 1,0186.$$

Nach (19), (14) ist

$$S_m = 72\pi\,\frac{\sin z}{z} \cdot \frac{v^2(2v-3)^3}{(v^2+2v-6)^2(v-1)^2},$$

$$v = 2\cos z + s, \qquad s^2 = 4u^2 - 6u + 3, \qquad u = \cos z,$$

woraus man ersieht, daß S_m, als Funktion von z, abgesehen von den Verzweigungsstellen von s nur dort Singularitäten haben kann, wo der Nenner

$$(v^2+2v-6)^2(v-1)^2$$

verschwindet, also v einen der Werte 1, $-1 \pm \sqrt{7}$, bzw. u einen der Werte 1, $-\frac{1}{2}$ hat (s. Gl. (16)). Das erste tritt ein für $z = 2k\pi$ (k ganz), wenn man in $v = 2\cos z + s$ der Wurzel s den negativen Wert, d. i. -1, gibt, also im unteren Blatte. Nun ist

$$\frac{ds}{dz} = \frac{ds}{du} \cdot \frac{du}{dz} = \frac{1}{2s} \frac{d(s^2)}{du} \cdot \frac{du}{dz} = \frac{3 - 4\cos z}{s} \sin z,$$

$$\frac{d^2 s}{dz^2} = \frac{3 - 4\cos z}{s} \cos z + \frac{3}{s^3} \sin^3 z,$$

$$\frac{dv}{dz} = -2\sin z + \frac{3 - 4\cos z}{s} \sin z,$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -2\cos z + \frac{3 - 4\cos z}{s} \cos z + \frac{3}{s^3} \sin^3 z,$$

so daß für $z = 2k\pi$ außer $v - 1$ noch $\frac{dv}{dz}$ verschwindet, während $\frac{d^2 v}{dz^2}$ gleich -1 wird. Die Stellen $z = 2k\pi$ im unteren Blatt sind also Nullstellen zweiter Ordnung von $v - 1$, Pole vierter Ordnung von $\frac{v^2(2v-3)^3}{(v^2+2v-6)^2(v-1)^2}$ und, abgesehen von $z = 0$ selbst, Pole dritter Ordnung von S_m, weil $\sin z$ von erster Ordnung verschwindet. Dagegen ist die Stelle $z = 0$ im unteren Blatt, wegen des z im Nenner, ein Pol vierter Ordnung. Im oberen Blatt sind die Stellen $z = 2k\pi$ sämtlich regulär. — Der andere Fall, nämlich $v = -1 \pm \sqrt{7}$ bzw. $u = -\frac{1}{2}$ tritt für $z = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ ein. Hier wird im oberen Blatt der Faktor $v - 1 - \sqrt{7}$, im unteren $v - 1 + \sqrt{7}$ gleich 0. Da $\frac{dv}{dz}$ an diesen Stellen nicht verschwindet, sind sie einfache Nullstellen von $v^2 + 2v - 6$, Pole zweiter Ordnung von S_m, und zwar sowohl im oberen wie im unteren Blatte. Im oberen Blatt hat also der dem Punkt 0 zunächst gelegene Pol von diesem den Abstand $\frac{2}{3}\pi$. Dies ist $> r_0$, d. h. größer als der Abstand des nächsten Verzweigungspunktes von Punkt 0. Entwickelt man also im oberen Blatt S_m nach Potenzen von z, so ist r_0 der Radius des Konvergenzkreises. Da $\frac{\pi}{4} < 1 < r_0 < \frac{\pi}{3}$ ist, so stellt diese Entwickelung die Werte von $S_4, S_5, \ldots$ dar, aber noch nicht S_3.

Wir wollen jetzt die Reihenentwicklung für S_m an der Stelle $z = 0$ des oberen Blattes in ihren ersten Gliedern feststellen. Aus

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \cdots$$

ergibt sich zunächst

$$\cos^2 z = 1 - z^2 + \frac{1}{3} z^4 - \frac{2}{45} z^6 + \cdots$$

und weiter

$$s^2 = 1 - z^2 + \frac{13}{12} z^4 - \frac{61}{360} z^6 + \cdots.$$

Für s muß sich also eine Reihe von der Form

$$s = c_0 + c_1 z^2 + c_2 z^4 + c_3 z^6 + \cdots$$

ergeben. Da im oberen Blatt s an der Stelle 0 den Wert $+1$ hat, so wird $c_0 = 1$, die übrigen Koeffizienten ergeben sich durch Quadrieren der letzten Reihe und Koeffizientenvergleichung:

$$s = 1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{5}{12} z^4 + \frac{89}{720} z^6 + \cdots.$$

Endlich wird (nach (28) und (14))

$$t = 3 - 2\cos z - s = \frac{3}{2} z^2 - \frac{1}{2} z^4 - \frac{29}{240} z^6 + \cdots. \tag{42}$$

Entwickeln wir die durch (29) gegebene rationale Funktion R von t nach steigenden Potenzen von t, so erhalten wir

$$R = 1 + \frac{1}{9} t + \frac{5}{108} t^2 + \frac{55}{1458} t^3 + \cdots.$$

Setzen wir hier die in (42) angegebene Reihe für t ein, so wird

$$R = 1 + \frac{1}{6} z^2 + \frac{7}{144} z^4 + \frac{2}{45} z^6 + \cdots.$$

Da nun

$$S_m = 54\pi \cdot \frac{\sin z}{z} \cdot R,$$

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \frac{z^6}{5040} + \cdots$$

ist, so erhalten wir schließlich

$$S_m = 54\pi \cdot \left(1 + 0 \cdot z^2 + \frac{7}{240} \cdot z^4 + \frac{227}{6048} z^6 + \cdots\right). \tag{43}$$

Das Fehlen des Gliedes mit z^2 in dieser Reihe zeigt, daß $S_m - 54\pi$ mit wachsendem m von derselben Größenordnung wie $\frac{1}{m^4}$ unendlich klein wird, während $B_n - 54\pi$ nur unendlich klein wie $\frac{1}{n^2}$ wird. Setzen wir mit Beschränkung auf reelle $m > \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} S_m &= 54\pi \cdot (1 + \xi), \quad \text{also} \\ \xi &= \frac{7}{240} z^4 + \frac{227}{6048} z^6 + \cdots, \end{aligned} \tag{44}$$

und definieren wir n durch die Gleichung

$$B_n = S_m,$$

so folgt aus (39) und (44)

$$\xi = \frac{1}{3} x^2 + \frac{2}{15} x^4 + \frac{17}{315} x^6 + \cdots.$$

Hieraus erhalten wir, wenn wir umgekehrt x^2 als Potenzreihe von ξ darstellen,

$$x^2 = 3\,\xi - \frac{18}{5}\,\xi^2 + \frac{747}{175}\,\xi^3 + \cdots,$$

und, wenn wir für ξ die durch (44) gegebene Reihe einsetzen,

$$x^2 = \frac{7}{80}\,z^4 + \frac{227}{2016}\,z^6 + \cdots = z^4\left(\frac{7}{80} + \frac{227}{2016}\,z^2 + \cdots\right),$$

$$x = z^2\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{5}} + \frac{227}{1008}\sqrt{\frac{5}{7}}\,z^2 + \cdots\right),$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{z^2}\left(4\sqrt{\frac{5}{7}} - \frac{1135}{441}\sqrt{\frac{5}{7}}\,z^2 + \cdots\right)$$

oder, wenn wir wieder für x und z $\frac{\pi}{n}$ und $\frac{\pi}{m}$ einführen,

$$n = \frac{4}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{5}{7}}\cdot m^2 - \frac{1135}{441}\sqrt{\frac{5}{7}}\,\pi + \sigma, \tag{45}$$

wo $\sigma = \frac{c_1}{m^2} + \frac{c_2}{m^4} + \frac{c_3}{m^6} + \cdots$ nach Potenzen von $\frac{1}{m^2}$ fortschreitet, also mit wachsendem m unendlich klein wie $\frac{1}{m^2}$ wird.

Durch Gleichung (45) wird die zu Anfang dieses Paragraphen gestellte Aufgabe im wesentlichen gelöst. Berechnet man nämlich für ein hinlänglich großes natürliches m die größte unter $d_m = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{5}{7}}\,m^2 - \frac{1135}{441}\sqrt{\frac{5}{7}}\,\pi$ gelegene ganze Zahl n_0, so wird S_m im allgemeinen zwischen B_{n_0} und B_{n_0+1} liegen müssen. Nur wenn d_m sehr nahe an n_0 oder sehr nahe an $n_0 + 1$ liegt, wird man mit Sicherheit nur schließen können, daß S_m zwischen B_{n_0-1} und B_{n_0+1} bzw. zwischen B_{n_0} und B_{n_0+2} liegen muß.

Über das Maß und die Diskrepanz von Punktmengen.

Von *E. Zermelo* in Freiburg i. Br.

Die vorliegende Arbeit enthält Untersuchungen über das *Lebesgue*sche Maß, die bereits eine Reihe von Jahren zurückliegen, aber abgesehen von einer unter meiner Leitung hergestellten Dissertation von *Waldemar Alexandrow* [1]) und einem kurzen Bericht in der Enzyklopädie d. math. Wissensch. (Bd. II, 3, 7, *Zoretti-Rosenthal*, II C 9a „Die Punktmengen") bisher noch nicht veröffentlicht worden sind. Ihre Bedeutung liegt teils im formalen Aufbau der Theorie, welcher an Stelle des „äußeren" und des „inneren" Maßes nur das erstere sowie der neu eingeführte Begriff der „Diskrepanz" zu Grunde gelegt werden, sowie in weitergehenden Sätzen über die zu einer beliebigen Punktmenge gehörende „Maßmenge" und „Diskrepanzmenge".

§ 1. Die Grundlagen der Theorie des Maßes.

Ein „Intervall" λ im ν-dimensionalen Raume ist eine Punktmenge, deren Koordinaten $x^{(i)}$ beschränkt sind durch Bedingungen der Form

$$l^{(i)} \leqq x^{(i)} \leqq l'^{(i)} \qquad (l^{(i)} \leqq l'^{(i)})$$

und heißt „abgeschlossen", wenn die gesamte Begrenzung $(l^{(i)}, l'^{(i)})$ mit zugerechnet wird, „eigentlich", wenn jedes $l^{(i)} < l'^{(i)}$ ist, d. h. wenn es „innere" Punkte $l^{(i)} < x^{(i)} < l'^{(i)}$ enthält. Jedes Intervall λ, das einen Punkt $\mathfrak{p}$ „eigentlich" enthält, heißt eine „Umgebung" dieses Punktes. Ein „abgeschlossenes" Intervall enthält stets mindestens einen Punkt, während ein „offenes" Intervall bei $l^{(i)} = l'^{(i)}$ auch „leer" sein kann. Eine Folge sukzessive ineinander liegender abgeschlossener Intervalle besitzt als gemeinsamen Bestandteil (Durchschnitt) wieder ein abgeschlossenes Intervall, enthält also mindestens einen gemeinsamen Punkt. Eine (endliche oder unendliche) „Intervallsumme" $\alpha + \beta + \gamma + \cdots$ ist eine Punktmenge σ, welche alle Punkte von α, alle von β usw. und nur solche Punkte enthält. Jede Intervallsumme läßt sich auch als „exklusive", d. h. als Summe paarweise „punktfremder" Intervalle darstellen. Auch der „Durchschnitt" $\alpha\beta$ von zwei, sowie der von endlich vielen Intervallen $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_t$ ist wieder eine endliche Intervallsumme.

Eine Punktmenge E heißt „beschränkt", wenn sie ganz in einem „Gesamt-Intervall" Λ enthalten ist, $E \in \Lambda$, und hat in bezug auf dieses Gesamtintervall

[1]) „Elementare Grundlagen für die Theorie des Maßes", Zürich 1915.

eine „Komplementärmenge" $\bar{E} = \Lambda - E$. Das Komplement $\bar{\lambda}$ einer beschränkten endlichen Intervallsumme ist selbst eine endliche Intervallsumme.

Eine für Intervalle und Intervallsummen definierte Eigenschaft $\mathfrak{E}$ heißt (nach *Peano*) „distributiv", falls sie für die Summe $\alpha + \beta$ zweier Intervalle dann und nur dann besteht, wenn sie für mindestens eines derselben gilt:

$$\mathfrak{E}_{\alpha+\beta} \equiv \mathfrak{E}_\alpha \vee \mathfrak{E}_\beta \qquad (\text{„oder"}).$$

Eine Eigenschaft heißt dagegen „kollektiv" (bei *Peano* „antidistributiv") falls sie für $\alpha + \beta$ dann und nur dann gilt, wenn sie für beide Teilintervalle gilt:

$$\mathfrak{F}_{\alpha+\beta} \equiv \mathfrak{F}_\alpha \wedge \mathfrak{F}_\beta \qquad (\text{„und"}).$$

Jede „kollektive" Eigenschaft ist die Negation einer „distributiven" und umgekehrt:

$$\mathfrak{F}_\alpha \equiv \bar{\mathfrak{E}}_\alpha, \qquad \mathfrak{E}_\alpha \equiv \bar{\mathfrak{F}}_\alpha.$$

Für distributive und kollektive Eigenschaften besteht der

Satz von Peano. Gilt eine distributive Eigenschaft $\mathfrak{E}$ in einem (endlichen) abgeschlossenen Intervall Λ, so enthält dieses mindestens einen Punkt $\mathfrak{q}$ von der Beschaffenheit, daß $\mathfrak{E}$ in jeder Umgebung ω von $\mathfrak{q}$ gilt. Gilt eine kollektive Eigenschaft $\mathfrak{F}$ in einer Umgebung jedes Punktes $\mathfrak{p}$ des abgeschlossenen Intervalles Λ, so gilt sie auch für das Gesamtintervall.

Eine Anwendung des Satzes von der „distributiven" Eigenschaft ist die Existenz der „Häufungspunkte" für jede beschränkte unendliche Punktmenge, sowie die Existenz der „Kondensations"- oder „Verdichtungspunkte" für eine *nicht abzählbare* beschränkte Punktmenge. Die wichtigste Anwendung der „kollektiven" Eigenschaft bildet der *Heine-Borel*sche

„Überdeckungssatz". Ist ein abgeschlossenes Intervall Λ „eigentlich überdeckbar" durch eine unendliche Menge Δ von Intervallen, so daß jeder Punkt $\mathfrak{p}$ von Λ im Innern mindestens eines dieser Intervalle liegt, so ist das gesamte Intervall Λ auch „endlich überdeckbar", d. h. eigentlich überdeckbar durch eine endliche Teilmenge Δ' von Δ.

Denn die Eigenschaft eines Teilintervalls α von Λ, durch Δ „endlich überdeckbar" zu sein, ist „kollektiv" in angegebenem Sinne, und sie gilt nach Voraussetzung in der „Umgebung" jedes Punktes $\mathfrak{p}$ von Λ, nämlich in jedem (offenen) Intervall δ der Menge Δ, welches den Punkt im Innern enthält. Der Satz läßt sich dann übertragen auf die Überdeckung einer beliebigen beschränkten und abgeschlossenen Punktmenge A.

Ein „*Gebiet*" G ist eine Punktmenge, welche nur „innere Punkte" enthält, d. h. mit jedem ihrer Punkte $\mathfrak{p}$ zugleich auch eine ganze „Umgebung" ω von $\mathfrak{p}$. Die Komplementärmenge $\bar{G}$ eines beschränkten Gebietes in bezug auf das abgeschlossene „Gesamtintervall" Λ, welches G umschließt, ist eine *abgeschlossene* Punktmenge und umgekehrt.

Satz. Jedes „beschränkte" Gebiet ist eine (endliche oder unendliche) Intervallmenge. Denn es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine gegen 0 abnehmende Folge positiver Zahlen und G_n die Teilmenge von G, deren Abstand von der *abgeschlossenen* Punktmenge $\bar{G}$ $\geqq \varepsilon_n$ ist. Dann ist auch G_n abgeschlossen, wird also von der Menge Δ der Umgebungen,

welche G eigentlich überdecken, nach dem vorigen Satze auch „endlich überdeckt", also etwa durch die endliche Intervallmenge A_n. Die Summe *aller* dieser Intervallsummen A_n überdeckt dann das *ganze* Gebiet G und ist gleichzeitig in ihm enthalten. Also ist $G = \mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 + \mathsf{A}_3 + \cdots$ selbst eine (abzählbare) Intervallsumme.

Die „*Ausdehnung*" eines Intervalles λ, das durch die Ungleichheiten

$$l^{(i)} \leqq x^{(i)} \leqq l'^{(i)}$$

gegeben ist, wird definiert als Produkt sämtlicher Differenzen $l'^{(i)} - l^{(i)}$ und ist positiv und von 0 verschieden für jedes eigentliche Intervall. Die Ausdehnung einer endlichen Intervallsumme $\mathsf{A} = a_1 + a_2 + \cdots + a_t$ ist gleich der Summe der Ausdehnungen ihrer „exklusiven" Bestandteile:

$$\mathsf{A} = a_1 + \bar{a}_1 a_2 + \bar{a}_1 \bar{a}_2 a_3 + \cdots + \bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{n-1} a_n ,$$
$$\mathfrak{m}\mathsf{A} = \mathfrak{m} a_1 + \mathfrak{m}(\bar{a}_1 a_2) + \cdots + \mathfrak{m}(\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{n-1} a_n) ,$$

und ist unabhängig von der Wahl der benutzten Zerlegungen. Die Ausdehnung einer unendlichen *abzählbaren* Intervallsumme

$$\mathsf{A} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

ist gleich dem Grenzwerte $\lim_{n=\infty} \mathfrak{m}\mathsf{A}_n$, dem die Ausdehnungen $\mathfrak{m}\mathsf{A}_n$ der endlichen Teilsummen

$$\mathsf{A}_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

mit wachsendem Index zustreben. Sie ist endlich und $\leqq \mathfrak{m}\Lambda$, für jede „beschränkte" Intervallsumme $\mathsf{A}_n \subseteq \Lambda$ und unabhängig von der Reihenfolge der Summanden. Für alle (endlichen und abzählbaren) Intervallsummen gilt nun der

Subsumptionssatz. Die Ausdehnung jeder Intervallsumme A *ist nicht größer als die jeder anderen sie ganz überdeckenden Intervallsumme* B *und ist daher unabhängig auch von der Wahl der sie erzeugenden Intervallmenge.*

Der Satz ist trivial für endliche Intervallmengen. Für jede abzählbare Intervallsumme A und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es aber eine *abgeschlossene endliche* Intervallsumme $\mathsf{A}' \subseteq \mathsf{A}$, für welche

$$0 \leqq \mathfrak{m}\mathsf{A} - \mathfrak{m}\mathsf{A}' < \varepsilon ,$$

und die man erhält, indem man zunächst A durch eine erzeugende endliche Teilsumme A_t approximiert und dann jedes ihrer erzeugenden eigentlichen Intervalle durch ein kleineres abgeschlossenes ersetzt. Diese abgeschlossene Punktmenge A' wird nun zugleich mit A überdeckt durch die abzählbare Intervallsumme B und *eigentlich* überdeckt durch die Summe B' der entsprechend *vergrößerten* Intervalle β', wobei die Vergrößerungen doch so klein gehalten werden können, daß $\mathfrak{m}\mathsf{B}' < \mathfrak{m}\mathsf{B} + \varepsilon$. Nach dem „Überdeckungssatze" (S. 155) ist dann A' auch *endlich* überdeckbar durch B', wird somit bereits überdeckt durch eine *endliche* Teilsumme B'_n von B', und es gilt für die endlichen Intervallsummen A' und B'_n, $\mathfrak{m}\mathsf{A}' \leqq \mathfrak{m}\mathsf{B}'_n$, also

$$\mathfrak{m}\mathsf{A} - \varepsilon < \mathfrak{m}\mathsf{A}' \leqq \mathfrak{m}\mathsf{B}'_n \leqq \mathfrak{m}\mathsf{B}' < \mathfrak{m}\mathsf{B} + \varepsilon ,$$

d. h. $\mathfrak{m}\mathsf{A} < \mathfrak{m}\mathsf{B} + 2\varepsilon$ für beliebiges $\varepsilon > 0$, d. h. $\mathfrak{m}\mathsf{A} \leqq \mathfrak{m}\mathsf{B}$. Stellen nun A und B durch verschiedene erzeugende Intervallmengen Δ und Δ' dieselbe Punktmenge

dar, so ist gleichzeitig $\mathsf{A} \Subset \mathsf{B}$ und $\mathsf{B} \Subset \mathsf{A}$, also $\mathfrak{m}\mathsf{A} = \mathfrak{m}\mathsf{B}$. Außerdem gelten für beliebige endliche und abzählbare Intervallsummen die Grundformeln

$$(1) \qquad \mathfrak{m}(\mathsf{A}+\mathsf{B}) + \mathfrak{m}\mathsf{A}\mathsf{B} = \mathfrak{m}\mathsf{A} + \mathfrak{m}\mathsf{B},$$

wo $\mathsf{A}+\mathsf{B}$ die Vereinigung der Intervallsummen A und B und $\mathsf{A}\mathsf{B}$ ihren Durchschnitt (der sich ebenfalls als Intervallsumme darstellen läßt) bedeuten. Für exklusive Intervallsummen $(\mathsf{A}\mathsf{B} = 0)$ wird also

$$(1\,\mathrm{a}) \qquad \mathfrak{m}(\mathsf{A}+\mathsf{B}) = \mathfrak{m}\mathsf{A} + \mathfrak{m}\mathsf{B}.$$

Allgemein aber gilt für jede endliche oder abzählbare Summe von Intervallsummen

$$(2) \qquad \mathfrak{m}(\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 + \mathsf{A}_3 + \cdots) \leqq \mathfrak{m}\mathsf{A}_1 + \mathfrak{m}\mathsf{A}_2 + \mathfrak{m}\mathsf{A}_3 + \cdots$$

und für exklusive Intervallsummen $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots$

$$(2\,\mathrm{a}) \qquad \mathfrak{m}(\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 + \cdots) = \mathfrak{m}\mathsf{A}_1 + \mathfrak{m}\mathsf{A}_2 + \cdots.$$

§ 2. Maß und Diskrepanz beschränkter Punktmengen.

Definition 1. *Das „Maß“* $\mathfrak{m}E$ *einer auf das Gesamtintervall* Λ *beschränkten Punktmenge* E *ist die untere Grenze für die Ausdehnung* $\mathfrak{m}\mathsf{A}$ *jeder innerhalb* Λ *die Menge* E *umschließenden (abzählbaren) Intervallsumme* A.

Nach dieser Definition und dem „Subsumptionssatze“ (§ 1) ist also stets

$$0 \leqq \mathfrak{m}E = \mathfrak{U}_{E \Subset \mathsf{A}}\, \mathfrak{m}\mathsf{A} \leqq \mathfrak{m}\mathsf{A} \leqq \mathfrak{m}\Lambda = I.$$

Für jede Intervallsumme A fällt also das „Maß“ zusammen mit der „Ausdehnung“. Ist $E_1 \Subset E$ eine beliebige Teilmenge von E und A eine beliebige E überdeckende Intervallsumme, so ist auch $E_1 \Subset \mathsf{A}$ also

$$\mathfrak{m}E_1 \leqq \mathfrak{m}\mathsf{A} \quad \text{und somit auch} \quad \mathfrak{m}E_1 \leqq \mathfrak{U}\, \mathfrak{m}\mathsf{A} = \mathfrak{m}E.$$

Es gilt also auch für beliebige beschränkte Punktmengen E der

Allgemeine Subsumptionssatz. Das Maß einer Punktmenge E *ist nicht kleiner als das Maß jeder ihrer Teilmengen.*

Da allgemein für den Durchschnitt und die Summe von Punktmengen gilt

$$E_1 E_2 \Subset E_1 \Subset E_1 + E_2 \Subset I,$$

so ist auch stets

$$0 \leqq \mathfrak{m}E_1E_2 \leqq \mathfrak{m}E_1 \leqq \mathfrak{m}(E_1+E_2) \leqq I.$$

Sind ferner A_1 und A_2 beliebige E_1 bzw. E_2 überdeckende Intervallsummen, so ist wegen

$$E_1 + E_2 \Subset \mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2, \qquad E_1E_2 \Subset \mathsf{A}_1\mathsf{A}_2$$

wieder

$$\mathfrak{m}(E_1+E_2) + \mathfrak{m}E_1E_2 \leqq \mathfrak{m}(\mathsf{A}_1+\mathsf{A}_2) + \mathfrak{m}\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2 = \mathfrak{m}\mathsf{A}_1 + \mathfrak{m}\mathsf{A}_2,$$

und da die Summanden rechts sich den Grenzwerten $\mathfrak{m}E_1$ und $\mathfrak{m}E_2$ beliebig nähern können, so gilt die Formel („Grundformel“)

$$(3) \qquad \mathfrak{m}(E_1+E_2) + \mathfrak{m}E_1E_2 \leqq \mathfrak{m}E_1 + \mathfrak{m}E_2.$$

Definition 2. *Die „Diskrepanz“* [1]) $\mathfrak{d}E$ *einer beschränkten Punktmenge* E *ist die untere Grenze für die Ausdehnung des Durchschnittes* $\mathsf{A}\mathsf{B}$ *einer beliebigen die*

[1]) Bei *Lebesgue* die Differenz des „äußeren“ und „inneren Maßes“.

Menge E und einer ihre Komplementärmenge $\bar{E}$ überdeckenden Intervallsumme

$$0 \leqq \mathfrak{d} E = \underset{E \in \mathsf{A},\ \bar{E} \in \mathsf{B}}{\mathfrak{U}} \mathfrak{m}(\mathsf{A}\mathsf{B}) \leqq I = \mathfrak{m}\Lambda .$$

Da mit E auch A und B auf das Gesamtintervall Λ beschränkt werden sollen und zusammen $E + \bar{E} = \Lambda$ überdecken, so muß $\mathfrak{m}(\mathsf{A} + \mathsf{B}) = \mathfrak{m}\Lambda = I$ sein und es ist nach (1)

$$\mathfrak{m}(\mathsf{A} + \mathsf{B}) + \mathfrak{m}\mathsf{A}\mathsf{B} = \mathfrak{m}\mathsf{A} + \mathfrak{m}\mathsf{B},$$

also

$$\mathfrak{m}\mathsf{A}\mathsf{B} = \mathfrak{m}\mathsf{A} + \mathfrak{m}\mathsf{B} - I,$$

und durch Approximation der Grenzwerte

$$\underset{E \in \mathsf{A},\ \bar{E} \in \mathsf{B}}{\mathfrak{U}} \mathfrak{m}\mathsf{A}\mathsf{B} = \underset{E \in \mathsf{A}}{\mathfrak{U}} \mathfrak{m}\mathsf{A} + \underset{\bar{E} \in \mathsf{B}}{\mathfrak{U}} \mathfrak{m}\mathsf{B} - I, \qquad \text{d. h.}$$

$$\mathfrak{d} E = \mathfrak{m} E + \mathfrak{m}\bar{E} - I = \mathfrak{d}\bar{E}. \tag{4}$$

Eine beschränkte Menge E heißt „*meßbar*“ (*Lebesgue*), wenn ihre Diskrepanz verschwindet $\mathfrak{d} E = 0$, (wenn das „äußere“ gleich dem „inneren Maß“ ist). Sie heißt „*Minimalmenge*“, wenn ihre Diskrepanz gleich ihrem Maß ist: $\mathfrak{d} E = \mathfrak{m} E$, $\mathfrak{m}\bar{E} = I$ (wenn ihr „inneres Maß“ null ist). *Jeder Teil einer Minimalmenge ist wieder eine Minimalmenge.* Denn aus $E_1 \in E$ folgt $\bar{E} \in \bar{E}_1$, also $\mathfrak{m}\bar{E}_1 \geqq \mathfrak{m}\bar{E} = I$ und $\mathfrak{d}\bar{E}_1 = \mathfrak{d} E_1 = \mathfrak{m}\bar{E}_1 + \mathfrak{m} E_1 - I = \mathfrak{m} E_1$. Wendet man die „Hauptformel“ (3) auf $\bar{E}_1$ und $\bar{E}_2$ an und beachtet, daß $\overline{E_1 E_2} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2$ und $\overline{E_1 + E_2} = \bar{E}_1 \bar{E}_2$ ist, so ergibt sich aus

$$\begin{aligned} &\mathfrak{m}(E_1 + E_2) + \mathfrak{m} E_1 E_2 \leqq \mathfrak{m} E_1 + \mathfrak{m} E_2 && \text{und} \\ &\underline{\mathfrak{m}(\bar{E}_1 + \bar{E}_2) + \mathfrak{m}(\bar{E}_1 \bar{E}_2) \leqq \mathfrak{m}\bar{E}_1 + \mathfrak{m}\bar{E}_2} && \text{durch Addition} \\ &\mathfrak{d}(E_1 + E_2) + \mathfrak{d}(E_1 E_2) \leqq \mathfrak{d} E_1 + \mathfrak{d} E_2 , && (5) \end{aligned}$$

wo immer die *Un*gleichheit gelten muß, wenn sie auch nur in einer der vorstehenden Formeln gelten sollte.

Da $\mathfrak{m} E$ und $\mathfrak{d} E$ nie negativ sein können, so gilt a fortiori

$$\mathfrak{m}(E_1 + E_2) \leqq \mathfrak{m} E_1 + \mathfrak{m} E_2 , \tag{3 a}$$

$$\mathfrak{d}(E_1 + E_2) \leqq \mathfrak{d} E_1 + \mathfrak{d} E_2 , \tag{5 a}$$

und durch vollständige Induktion folgt für jede endliche Summe

$$\mathfrak{m}(E_1 + E_2 + \cdots + E_n) \leqq \mathfrak{m} E_1 + \mathfrak{m} E_2 + \cdots + \mathfrak{m} E_n , \tag{6}$$

$$\mathfrak{d}(E_1 + E_2 + \cdots + E_n) \leqq \mathfrak{d} E_1 + \mathfrak{d} E_2 + \cdots + \mathfrak{d} E_n . \tag{7}$$

Ferner ist $\mathfrak{d}(E_1 E_2) = \mathfrak{d}(\overline{E_1 E_2}) = \mathfrak{d}(\bar{E}_1 + \bar{E}_2) \leqq \mathfrak{d}\bar{E}_1 + \mathfrak{d}\bar{E}_2 = \mathfrak{d} E_1 + \mathfrak{d} E_2$ und allgemein

$$\mathfrak{d}(E_1 E_2 \cdots E_n) \leqq \mathfrak{d} E_1 + \mathfrak{d} E_2 + \cdots + \mathfrak{d} E_n . \tag{8}$$

Die Ausdehnung der Formeln (6), (7) und (8) auf (abzählbar) unendliche Summen bedarf noch eines Beweises, da der Grenzübergang nicht ohne weiteres möglich ist.

Es seien die Punktmengen $E_1, E_2, E_3, \ldots$ sämtlich im Gesamtintervall Λ enthalten und der Reihe nach überdeckt von den (gleichfalls in Λ enthaltenen) Intervallsummen $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3, \ldots$ Dann wird auch

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \cdots$$

überdeckt von

$$\mathsf{A}^* = \mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 + \mathsf{A}_3 + \cdots.$$

Also ist nach dem Subsumptionssatze

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}E \leqq \mathfrak{m}\mathsf{A}^* &\leqq \mathfrak{m}\mathsf{A}_1 + \mathfrak{m}\mathsf{A}_2 + \mathfrak{m}\mathsf{A}_3 + \cdots \\ &\leqq (\mathfrak{m}E_1 + \varepsilon_1) + (\mathfrak{m}E_2 + \varepsilon_2) + \cdots, \end{aligned}$$

wobei jede der positiven Größen ε_n unabhängig von den übrigen durch Wahl von A_n beliebig klein gemacht werden kann, also auch ihre Summe, und es ist in der Tat

$$(6\,\mathrm{a}) \qquad \mathfrak{m}E = \mathfrak{m}(E_1 + E_2 + \cdots) \leqq \mathfrak{m}E_1 + \mathfrak{m}E_2 + \cdots,$$

was natürlich nur Bedeutung hat, falls die rechts stehende Summe konvergiert.

Ferner sei B_n eine $\bar{E}_n$ überdeckende Intervallsumme innerhalb Λ. Dann wird $\bar{E} = \bar{E}_1 \bar{E}_2 \cdots$, der Durchschnitt aller $\bar{E}_n$, gleichfalls überdeckt von

$$\mathsf{B}^* = \mathsf{B}_1 \mathsf{B}_2 \cdots, \text{ dem Durchschnitt aller } \mathsf{B}_n,$$

und es ist jedenfalls $\mathsf{B}^* \neq \mathsf{B}_n$. Es wird also

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}E = \mathfrak{U}\,\mathfrak{m}\mathsf{A}\mathsf{B} &\leqq \mathfrak{m}\mathsf{A}^*\mathsf{B}^* = \mathfrak{m}(\mathsf{A}_1\mathsf{B}^* + \mathsf{A}_2\mathsf{B}^* + \cdots) \\ &\leqq \mathfrak{m}\mathsf{A}_1\mathsf{B}^* + \mathfrak{m}\mathsf{A}_2\mathsf{B}^* + \cdots \\ &\leqq \mathfrak{m}\mathsf{A}_1\mathsf{B}_1 + \mathfrak{m}\mathsf{A}_2\mathsf{B}_2 + \cdots. \end{aligned}$$

$$(7\,\mathrm{a}) \qquad \mathfrak{d}(E_1 + E_2 + \cdots) = \mathfrak{d}E \leqq \mathfrak{d}E_1 + \mathfrak{d}E_2 + \cdots,$$

da jedes $\mathfrak{m}\mathsf{A}_n\mathsf{B}_n$ unabhängig von allen übrigen das entsprechende $\mathfrak{d}E_n$ approximiert.

Ersetzt man in dieser Formel jedes E_n durch $\bar{E}_n$, also E durch $\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 + \cdots$ und $\bar{E}$ durch $E_1 E_2 E_3 \cdots$, den Durchschnitt aller E_n, und beachtet, daß stets $\mathfrak{d}E = \mathfrak{d}\bar{E}$ ist, so ergibt sich

$$(8\,\mathrm{a}) \qquad \mathfrak{d}(E_1 E_2 \cdots) \leqq \mathfrak{d}E_1 + \mathfrak{d}E_2 + \cdots.$$

Sind hier alle E_n „meßbar", d. h. $\mathfrak{d}E_n = 0$, so werden auch die linken Seiten in (7 a) und (8 a) verschwinden, und wir haben den *Hauptsatz* der *Lebesgue*schen Theorie:

Die Summe (Vereinigung) sowie der Durchschnitt von endlich vielen oder abzählbar unendlich vielen meßbaren Mengen ist wieder meßbar.

Sind demnach in der Grundformel (3) E_1 und E_2 beide meßbar, so sind es auch $E_1 + E_2$ und $E_1 E_2$, und es gilt in (5) die *Gleichheit*; sie muß also auch in (3) gelten, d. h.

$$(3^*) \quad \mathfrak{m}(E_1 + E_2) + \mathfrak{m}E_1E_2 = \mathfrak{m}E_1 + \mathfrak{m}E_2 \quad (\mathfrak{d}E_1 = \mathfrak{d}E_2 = 0)$$

entsprechend der Formel (1) für Intervallsummen. Sind in diesem Falle E_1 und E_2 zugleich „elementefremd" oder auch nur „maßfremd", d. h. $\mathfrak{m}E_1E_2 = 0$, so folgt

$$(3\,\mathrm{a}^*) \qquad \mathfrak{m}(E_1 + E_2) = \mathfrak{m}E_1 + \mathfrak{m}E_2,$$

und diese Formel läßt sich durch vollständige Induktion auf jede *endliche* Anzahl von Summanden ausdehnen:

$$(6\,\mathrm{a}^*) \quad \mathfrak{m}(E_1 + E_2 + \cdots + E_n) = \mathfrak{m}E_1 + \mathfrak{m}E_2 + \cdots + \mathfrak{m}E_n,$$

sofern alle $E_1, E_2, \ldots, E_n$ meßbar und unter sich „maßfremd" sind. Hierbei wird nur die Tatsache benutzt, daß wenn zwei Mengen E_1 und E_2 zu einer dritten E „maßfremd" sind:

$$\mathfrak{m}E_1E = \mathfrak{m}E_2E = 0,$$

das gleiche auch von ihrer Summe gelten muß. Denn es ist

$$\mathfrak{m}(E_1 + E_2)E = \mathfrak{m}(E_1E + E_2E) \leqq \mathfrak{m}E_1E + \mathfrak{m}E_2E = 0.$$

Das Entsprechende gilt auch für beliebig viele, ja abzählbar unendlich viele Summanden vermöge der Formel (6 a).

Nun seien die unendlich vielen auf Λ (das Hauptintervall) beschränkten Mengen $E_1, E_2, \ldots$ sämtlich „meßbar" und unter sich „elementefremd". Dann sind auch die Teilsummen

$$S_n = E_1 + E_2 + \cdots + E_n,$$

wie die Reste

$$R_n = E\bar{S}_n = E_{n+1} + E_{n+2} + \cdots$$

sämtlich meßbar und daher

$$\mathfrak{m}E = \mathfrak{m}(S_n + R_n) = \mathfrak{m}S_n + \mathfrak{m}R_n \geqq \mathfrak{m}S_n \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{m}S_n = \mathfrak{m}E_1 + \mathfrak{m}E_2 + \cdots + \mathfrak{m}E_n \leqq \mathfrak{m}E.$$

Die Reihe positiver Glieder

$$s = \mathfrak{m}E_1 + \mathfrak{m}E_2 + \cdots$$

ist also konvergent und ihr Restglied

$$r_n = \mathfrak{m}E_{n+1} + \mathfrak{m}E_{n+2} + \cdots \geqq \mathfrak{m}R_n$$

nähert sich mit wachsenden n der Null. Es wird somit

$$\mathfrak{m}E = \lim_{n=\infty} \mathfrak{m}S_n = \mathfrak{m}E_1 + \mathfrak{m}E_2 + \cdots = \mathfrak{m}(E_1 + E_2 + \cdots).$$

Sind dagegen die Summanden $E_1, E_2, \ldots$ nicht mehr untereinander punktfremd. so sind es doch die ihnen entsprechenden Teilmengen

$$E_1^* = E_1, \quad E_2^* = \bar{E}_1E_2, \quad E_2^* = \bar{E}_1\bar{E}_2E_3, \ldots, \quad E_n^* = \bar{E}_1\bar{E}_2 \cdots \bar{E}_{n-1}E_n,$$

und es wird wieder

$$S_n^* = E_1^* + E_2^* + \cdots E_n^* = S_n, \qquad E = E_1^* + E_2^* + \cdots,$$

also nach dem soeben Bewiesenen

$$(6\,a^{**}) \qquad \mathfrak{m}E = \mathfrak{m}E_1^* + \mathfrak{m}E_2^* + \cdots = \lim_{n=\infty} \mathfrak{m}S_n^* = \lim_{n=\infty} \mathfrak{m}S_n$$
$$= \lim_{n=\infty} \mathfrak{m}(E_1 + E_2 + \cdots + E_n).$$

Nun sei

$$P = E_1E_2 \cdots$$

der Durchschnitt von abzählbar unendlich vielen einzeln *meßbaren* Punktmengen $E_1, E_2, \ldots$ innerhalb des Gesamtintervalls Λ und

$$P_n = E_1E_2 \cdots E_n$$

der Durchschnitt der ersten n von ihnen. Dann wird

$$\bar{P}_n = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \cdots + \bar{E}_n,$$

und daher nach dem vorigen Satze

$$\mathfrak{m}\bar{P} = \mathfrak{m}(\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \cdots) = \lim_{n=\infty} \mathfrak{m}\bar{P}_n,$$

also, da mit $\bar{P}$ auch P meßbar ist,

$$\mathfrak{m}P = I - \mathfrak{m}\bar{P} = \lim_{n=\infty}(I - \mathfrak{m}\bar{P}_n) = \lim_{n=\infty}\mathfrak{m}P_n, \quad \text{d. h.}$$

$$\mathfrak{m}(E_1 E_2 \cdots) = \lim_{n=\infty}\mathfrak{m}(E_1 E_2 \cdots E_n). \tag{9}$$

Da die Summe wie der Durchschnitt von abzählbar vielen meßbaren Punktmengen wieder meßbar ist, sowie auch jedes Intervall (wegen $\mathfrak{m}\lambda + \mathfrak{m}\bar{\lambda} = I$), so ist auch jede (abzählbare) *Intervallsumme* meßbar, also auch jedes *Gebiet* (S. 155) und als Komplement eines Gebietes auch jede *abgeschlossene* (beschränkte) Punktmenge.

Ist E eine beliebige (meßbare oder nicht meßbare) Punktmenge im Gesamtintervall und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine nach 0 abnehmende Folge positiver Zahlen, so gibt es (nach der Definition des Maßes) zu jedem n eine E überdeckende Intervallsumme A_n derart, daß

$$\mathfrak{m}E \leqq \mathfrak{m}\mathsf{A}_n < \mathfrak{m}E + \varepsilon_n,$$

und der *Durchschnitt* aller dieser Intervallsummen A_n,

$$A = \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2 \cdots \Subset \mathsf{A}_n,$$

ist nach dem soeben Bewiesenen wieder eine *meßbare* E überdeckende Punktmenge, für welche nach dem Subsumptionssatze gilt:

$$\mathfrak{m}E \leqq \mathfrak{m}A \leqq \mathfrak{m}\mathsf{A}_n < \mathfrak{m}E + \varepsilon_n.$$

Also im Grenzfalle

$$\mathfrak{m}E = \mathfrak{m}A, \quad \text{wo} \quad E \Subset A \quad \text{und} \quad \mathfrak{d}A = 0, \quad \text{d. h.}$$

Satz. Jede beschränkte Punktmenge E besitzt eine „maßgleiche Hülle", d. h. eine sie überdeckende meßbare Punktmenge von gleichem Maße. (*De la Vallée-Poussin.*)

Ist A eine „maßgleiche Hülle" von E und C eine beliebige „meßbare" Menge, so ist wegen $EC \Subset AC$, $E\bar{C} \Subset A\bar{C}$ nach dem Subsumptionssatze und nach (3a*)

$$\mathfrak{m}E = \mathfrak{m}(EC + E\bar{C}) \leqq \mathfrak{m}EC + \mathfrak{m}E\bar{C} \leqq \mathfrak{m}AC + \mathfrak{m}A\bar{C} = \mathfrak{m}A = \mathfrak{m}E,$$

also

$$\mathfrak{m}E = \mathfrak{m}EC + \mathfrak{m}E\bar{C} \qquad (\mathfrak{d}C = 0), \tag{10}$$

und, weil jetzt für beide Summanden die Gleichheit gelten muß,

$$\mathfrak{m}EC = \mathfrak{m}AC, \quad \mathfrak{m}E\bar{C} = \mathfrak{m}A\bar{C}.$$

Ferner ist nach (10)

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(E+C) &= \mathfrak{m}(E+C)C + \mathfrak{m}(E+C)\bar{C} = \mathfrak{m}C + \mathfrak{m}E\bar{C}\\ &= \mathfrak{m}C + \mathfrak{m}A\bar{C} = \mathfrak{m}(C + A\bar{C}) = \mathfrak{m}(A+C).\end{aligned}$$

Ist also A eine maßgleiche Hülle von E, so sind auch AC und $A + C$ maßgleiche Hüllen von EC bezw. $E + C$. Sind A und B maßgleiche Hüllen von E bzw. $\bar{E}$, so wird

$$\mathfrak{m}E + \mathfrak{m}\bar{E} = \mathfrak{m}A + \mathfrak{m}B = \mathfrak{m}(A+B) + \mathfrak{m}AB,$$

also, da $A + B = \Lambda$ und somit $\mathfrak{m}(A+B) = I$ ist,

$$\mathfrak{d}E = \mathfrak{m}E + \mathfrak{m}\bar{E} - I = \mathfrak{m}AB; \tag{11}$$

sowie, wenn C eine beliebige meßbare Menge ist, da dann $\mathfrak{m}EC = \mathfrak{m}AC$, $\mathfrak{m}\overline{EC} = \mathfrak{m}(\bar{E} + \bar{C}) = \mathfrak{m}(B + \bar{C})$, also $B + \bar{C}$ maßgleiche Hülle von $\overline{EC}$ ist.

(11 a) $$\mathfrak{d}EC = \mathfrak{m}AC(B + \bar{C}) = \mathfrak{m}ABC.$$

Sind jetzt A_1 und B_1 zwei beliebige E bzw. $\bar{E}$ überdeckende meßbare Mengen innerhalb des Gesamtintervalles, so wird

$$\mathfrak{m}E = \mathfrak{m}A \leqq \mathfrak{m}A_1, \qquad \mathfrak{m}\bar{E} = \mathfrak{m}B \leqq \mathfrak{m}B_1, \qquad \text{also}$$

$$\mathfrak{d}E = \mathfrak{m}E + \mathfrak{m}\bar{E} - I \leqq \mathfrak{m}A_1 + \mathfrak{m}B_1 - \mathfrak{m}(A_1 + B_1) = \mathfrak{m}A_1B_1,$$

d. h.

$$\mathfrak{d}E = \mathfrak{m}AB = \mathfrak{U}\,\mathfrak{m}A_1B_1$$

die untere Grenze für das Maß des Durchschnittes von je zwei solchen meßbaren Mengen A_1, B_1.

(11 a*) $$\mathfrak{d}EC = \mathfrak{m}ABC = \mathfrak{U}\,\mathfrak{m}A_1B_1C.$$

(Verallgemeinerungen der Definitionsformel (2) für die Diskrepanz.) Ferner wird, wenn wieder A, B maßgleiche Hüllen von E und $\bar{E}$ bezeichnen,

$$\mathfrak{m}EC + \mathfrak{m}\bar{E}C = \mathfrak{m}AC + \mathfrak{m}BC = \mathfrak{m}(AC + BC) + \mathfrak{m}AC \cdot BC$$
$$= \mathfrak{m}(A + B)C + \mathfrak{m}ABC = \mathfrak{m}C + \mathfrak{d}EC, \qquad \text{d. h.}$$

(12) $$\mathfrak{d}EC = \mathfrak{m}EC + \mathfrak{m}\bar{E}C - \mathfrak{m}C$$

für jede meßbare Punktmenge C als Verallgemeinerung der Formel (4), sowie

(12 a) $$\mathfrak{d}(E + C) = \mathfrak{d}(\overline{E + C}) = \mathfrak{d}(\bar{E}\bar{C}) = \mathfrak{m}\bar{E}\bar{C} + \mathfrak{m}E\bar{C} - \mathfrak{m}\bar{C}$$
$$= \mathfrak{m}E\bar{C} + \mathfrak{m}\bar{E}\bar{C} - \mathfrak{m}\bar{C}$$

für jede *meßbare* Menge C. Durch Addition folgt nun

$$\mathfrak{d}(E + C) + \mathfrak{d}EC = (\mathfrak{m}EC + \mathfrak{m}E\bar{C}) + (\mathfrak{m}\bar{E}C + \mathfrak{m}\bar{E}\bar{C}) - (\mathfrak{m}C + \mathfrak{m}\bar{C})$$
$$= \mathfrak{m}E + \mathfrak{m}\bar{E} - I = \mathfrak{d}E.$$

Diese Formel

(5*) $$\mathfrak{d}(E + C) + \mathfrak{d}EC = \mathfrak{d}E$$

erhalten wir auch als Ungleichheit mit $\leqq$ durch Addition der allgemein gültigen Formeln

$$\mathfrak{m}(E + C) + \mathfrak{m}EC \leqq \mathfrak{m}E + \mathfrak{m}C$$
$$\mathfrak{m}(\bar{E} + \bar{C}) + \mathfrak{m}\bar{E}\bar{C} \leqq \mathfrak{m}\bar{E} + \mathfrak{m}\bar{C}$$

mit Rücksicht auf die Beziehungen $\overline{E + C} = \bar{E}\bar{C}$, $\overline{EC} = \bar{E} + \bar{C}$ und $\mathfrak{m}C + \mathfrak{m}\bar{C} = I$. Da aber tatsächlich in (5*) die Gleichheit gilt, so gilt sie auch in beiden durch Addition vereinigten Formeln, d. h.

(3**) $$\mathfrak{m}(E + C) + \mathfrak{m}EC = \mathfrak{m}E + \mathfrak{m}C,$$

als Verallgemeinerung von (3*), wenn auch nur *eine* der beiden Mengen E_1, E_2 meßbar ist. Dieselbe Formel ergibt sich auch unmittelbar durch Benutzung der maßgleichen Hülle A:

$$\mathfrak{m}(E + C) + \mathfrak{m}EC = \mathfrak{m}(A + C) + \mathfrak{m}AC = \mathfrak{m}A + \mathfrak{m}C = \mathfrak{m}E + \mathfrak{m}C.$$

Sind die Punktmengen $C_1, C_2, \ldots$ sämtlich meßbar und unter sich maßfremd $\mathfrak{m}C_rC_s = 0$ $(r \neq s)$, so ist auch ihre Summe meßbar und $\mathfrak{m}EC_rC_s \leqq \mathfrak{m}C_rC_s = 0$ für jede Menge E. Somit wird nach S. 161 und (6a**)

$$(13)\quad \mathfrak{m}E(C_1 + C_2 + \cdots) = \mathfrak{m}A(C_1 + C_2 + \cdots) = \mathfrak{m}AC_1 + \mathfrak{m}AC_2 + \cdots$$
$$= \mathfrak{m}EC_1 + \mathfrak{m}EC_2 + \cdots, \qquad \text{sowie}$$
$$(14)\quad \mathfrak{d}E(C_1 + C_2 + \cdots) = \mathfrak{m}AB(C_1 + C_2 + \cdots) = \mathfrak{d}EC_1 + \mathfrak{d}EC_2 + \cdots.$$

Ist wieder B maßgleiche Hülle von $\bar{E}$ (und zugleich A eine von E), so wird $E = EB + E\bar{B} = E_1 + E_0$, sowie

$$\mathfrak{m}E_1 = \mathfrak{m}EB = \mathfrak{m}AB = \mathfrak{d}E = \mathfrak{d}EB = \mathfrak{d}E_1 \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{d}E_0 = \mathfrak{d}E\bar{B} = \mathfrak{m}AB\bar{B} = 0, \quad \text{d. h.:}$$

Jede diskrepante (beschränkte) Punktmenge E läßt sich zerlegen in eine „meßbare" Menge E_0 und eine „Minimalmenge" E_1.

Ist E eine beliebige Menge, A eine maßgleiche Hülle und E' ihre Ableitung (die Menge ihrer Häufungspunkte), so ist die Summe $E + E'$ „abgeschlossen", mithin meßbar, und es wird

$$(15)\quad \mathfrak{m}E = \mathfrak{m}E(E + E') = \mathfrak{m}A(E + E') = \mathfrak{m}(E + AE'),$$

also $A_0 = A(E + E') = E + AE'$ wegen $E \notin A$, und $E \notin E + E'$ ist eine maßgleiche Hülle von E, welche außer Punkten von E nur noch solche von E' enthält.

Jede beschränkte Punktmenge kann lediglich durch Punkte ihrer Ableitung zu einer maßgleichen Hülle ergänzt werden.

§ 3. Maßmenge und Diskrepanzmenge. Unbeschränkte Punktmengen.

Eine Punktmenge E heiße „maßhaltig", wenn sie ein von Null verschiedenes Maß besitzt (keine „Nullmenge" ist), „diskrepant", wenn sie eine von Null verschiedene Diskrepanz besitzt, also „nicht meßbar" ist. Sie heißt „in einem Intervall λ maßhaltig bzw. diskrepant", wenn die im Intervall enthaltene Teilmenge $E\lambda$ maßhaltig bzw. diskrepant ist.

Die Eigenschaft, in einem Intervall maßhaltig bzw. diskrepant zu sein, ist nun aber eine „distributive" (§ 1). Denn es ist bei jeder Zerlegung $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ in zwei (getrennte) Teilintervalle, da Intervalle meßbar sind, nach (13) und (14)

$$\mathfrak{m}E\lambda = \mathfrak{m}E(\lambda_1 + \lambda_2) = \mathfrak{m}E\lambda_1 + \mathfrak{m}E\lambda_2,$$
$$\mathfrak{d}E\lambda = \mathfrak{d}E(\lambda_1 + \lambda_2) = \mathfrak{d}E\lambda_1 + \mathfrak{d}E\lambda_2,$$

und die linke Seite wird, da beide Summanden wesentlich positiv sind, dann und und nur dann verschwinden, wenn beide Summanden es tun. Nach dem *Peano*schen Satze (§ 1) folgt also:

Satz 1. *In jedem abgeschlossenen Intervalle λ, in welchem eine Punktmenge „maßhaltig" bzw. „diskrepant" ist, besitzt sie mindestens einen „Maßpunkt" $\mathfrak{p}$, in dessen beliebiger Umgebung sie noch maßhaltig ist. In jedem abgeschlossenen Intervalle, wo sie diskrepant ist, besitzt sie mindestens einen „Diskrepanzpunkt" $\mathfrak{q}$, in dessen beliebiger Umgebung sie noch diskrepant ist.*

Die Menge der „Maßpunkte" $\mathfrak{p}$, die zu einer Menge E gehören, heiße ihre „Maßmenge" $\mathfrak{M}E$, die Menge ihrer Diskrepanzpunkte $\mathfrak{q}$ heiße ihre „Diskrepanzmenge" $\mathfrak{D}E$.

Da wegen $\mathfrak{d}E\lambda \leqq \mathfrak{m}E\lambda$ eine Punktmenge in jedem Intervall, wo sie diskrepant ist, auch maßhaltig sein muß, so ist jeder Diskrepanzpunkt auch ein Maßpunkt und $\mathfrak{D}E \in \mathfrak{M}E$; *die Diskrepanzmenge ist in der Maßmenge enthalten.* Ist ferner $E_1 \in E$ eine Untermenge von E, so gilt für jedes Intervall

$$0 < \mathfrak{m}E_1\lambda \leqq \mathfrak{m}E\lambda,$$

und jeder Maßpunkt von E_1 ist zugleich Maßpunkt von E, also

$$\mathfrak{M}E_1 \in ME.$$

Sind A und B „maßgleiche Hüllen" von E und $\bar{E}$ innerhalb des Gesamtintervalls Λ, so ist auch in jedem kleineren Intervall $\mathfrak{m}E\lambda = \mathfrak{m}A\lambda$, $\mathfrak{m}\bar{E}\lambda = \mathfrak{m}B\lambda$, sowie nach (11a)

$$\mathfrak{d}E\lambda = \mathfrak{m}AB\lambda,$$

d. h. die Menge AB ist maßhaltig in jedem Intervall λ, wo E diskrepant ist, und umgekehrt, also

$$\mathfrak{D}E = \mathfrak{M}(AB).$$

Ist C irgendeine meßbare Menge und λ ein Intervall, z. B. die Umgebung eines Punktes $\mathfrak{p}$, so ist nach (10)

$$\mathfrak{m}E\lambda = \mathfrak{m}EC\lambda + \mathfrak{m}E\bar{C}\lambda$$

und

$$\mathfrak{d}E\lambda = \mathfrak{d}EC\lambda + \mathfrak{d}E\bar{C}\lambda;$$

jeder Maßpunkt von E ist also auch Maßpunkt von EC oder $E\bar{C}$ und jeder Diskrepanzpunkt von E auch Diskrepanzpunkt von EC oder $E\bar{C}$, d. h.

$$(16)\quad \mathfrak{M}E = \mathfrak{M}(EC) + \mathfrak{M}(E\bar{C}), \qquad (17)\quad \mathfrak{D}E = \mathfrak{D}(EC) + \mathfrak{D}(E\bar{C}).$$

Ist $\mathfrak{p}$ irgend ein Maßpunkt der Menge E, also E maßhaltig in *jeder* Umgebung λ, $\mathfrak{m}E\lambda > 0$, so ist $\mathfrak{p}$ natürlich auch Häufungspunkt von E, ja „Kondensationspunkt" von E, weil sonst $E\lambda$ „abzählbar" und vom Maße 0 wäre. Zugleich muß aber $\mathfrak{p}$ auch Häufungspunkt von $P = \mathfrak{M}E$ sein. Denn sonst gäbe es eine abgeschlossene Umgebung λ von $\mathfrak{p}$, welche außer $\mathfrak{p}$ keinen Maßpunkt mehr enthielte, und man könnte $\mathfrak{p}$ in ein Intervallgebiet ω von der Ausdehnung $\mathfrak{m}\omega < \varepsilon$ einschließen, so daß der abgeschlossene Restbereich $\lambda\bar{\omega}$ keinen Maßpunkt von E mehr enthielte, also $\mathfrak{m}E\lambda\bar{\omega} = 0$ wäre. Somit würde $\mathfrak{m}E\lambda = \mathfrak{m}E\lambda\omega + \mathfrak{m}E\lambda\bar{\omega} = \mathfrak{m}E\lambda\omega \leqq \mathfrak{m}\omega < \varepsilon$ beliebig klein, also Null und $\mathfrak{p}$ wäre kein Maßpunkt von E. Die Maßmenge P ist also „in sich dicht" und, da jede Umgebung λ eines Häufungspunktes $\mathfrak{p}'$ von P wieder Maßpunkte von E enthält, also selbst maßhaltig ist, zugleich auch „abgeschlossen" und damit „perfekt", gehört also zum „abgeschlossenen Bestandteil" der Ableitung E' von E. Das gleiche gilt auch von der „Diskrepanzmenge" $Q = \mathfrak{D}E$, die ja, wie oben gezeigt, als „Maßmenge" des Durchschnitts AB dargestellt werden kann. Wir haben somit:

Satz 2. *Die Maßmenge $\mathfrak{M}E$ wie die Diskrepanzmenge $\mathfrak{D}E$ jeder Punktmenge E sind perfekte Punktmengen, gehören also zum perfekten Bestandteile ihrer Ableitung E'.*

Weiter erhalten wir als Hauptsatz dieses Abschnittes:

Satz 3. *Das Maß einer beschränkten Punktmenge ist gleich dem Maß ihres Durchschnittes mit ihrer Maßmenge; die Diskrepanz einer Menge gleich der Diskrepanz ihres Durchschnittes mit ihrer Diskrepanzmenge.*

Es sei nämlich E wieder eine beliebige auf das Intervall Λ beschränkte Punktmenge und $P = \mathfrak{M}E$ ihre Maßmenge. Ferner sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine nach Null konvergierende Folge positiver Zahlen und E_n die Teilmenge des Durchschnittes $E\bar{P}$, deren Punkte von der *abgeschlossenen* Punktmenge P einen Abstand $\geqq \varepsilon_n$ besitzen. Dann gehört jeder Punkt von $E\bar{P}$ einer dieser Mengen E_n an (welche sukzessive ineinander liegen), und es ist

$$E\bar{P} = E_1 + E_2 + \cdots .$$

Jede dieser Teilmengen E_n ist aber eine „Nullmenge". Denn wäre E_n „maßhaltig" in Λ, so müßte nach Satz 1 E_n in Λ mindestens einen Maßpunkt $\mathfrak{p}_n$ besitzen, der zugleich ein *Häufungspunkt* von E_n und wegen $E_n \subseteq E$ auch Maßpunkt von E, also ein Punkt von P wäre und dann einen Abstand $\geqq \varepsilon_n$ von E_n haben müßte. Somit wird in der Tat $\mathfrak{m}E_n = 0$ und nach (6a)

$$\mathfrak{m}E\bar{P} \leqq \mathfrak{m}E_1 + \mathfrak{m}E_2 + \cdots = 0 ,$$

also, da P als abgeschlossene Menge auch meßbar ist, nach (10)

$$\mathfrak{m}E = \mathfrak{m}EP + \mathfrak{m}E\bar{P} = \mathfrak{m}EP = \mathfrak{m}(E\mathfrak{M}E). \tag{18}$$

Ist weiter E_1 eine beliebige Punktmenge zwischen EP und E, d. h. $EP \subseteq E_1 \subseteq E$, so ist nach dem Subsumptionssatze

$$\mathfrak{m}E = \mathfrak{m}EP \leqq \mathfrak{m}E_1 \leqq \mathfrak{m}E, \quad \text{also auch} \quad \mathfrak{m}E_1 = \mathfrak{m}E = \mathfrak{m}EP.$$

Daß Maß einer Menge bleibt also ungeändert bei Weglassung von beliebig vielen Punkten, welche keine Maßpunkte sind. Da ferner die Diskrepanzmenge $Q = \mathfrak{D}E$ als abgeschlossene Menge gleichfalls meßbar ist, so folgt nach (11) und (10)

$$\mathfrak{d}E = \mathfrak{m}AB = \mathfrak{m}ABQ + \mathfrak{m}AB\bar{Q} = \mathfrak{d}EQ + \mathfrak{d}E\bar{Q},$$

wo A und B maßgleiche Hüllen von E und $\bar{E}$ bezeichnen. Weiter ist

$$Q = \mathfrak{D}E = \mathfrak{M}(AB),$$

und $AB\bar{Q}$ ist elementefremd zu $Q = \mathfrak{M}(AB)$, enthält keine Maßpunkte von AB und somit auch keine von $AB\bar{Q} \subseteq AB$, ist mit ihrer eigenen Maßmenge punktfremd und hat daher das Maß Null (nach dem soeben Bewiesenen); d. h. es ist, wie behauptet

$$\mathfrak{d}E = \mathfrak{m}ABQ = \mathfrak{d}EQ = \mathfrak{d}(E\mathfrak{D}E). \tag{19}$$

Eine Ausdehnung des Satzes auf eine zwischen E und EQ liegende Menge E_1 ist hier natürlich nicht möglich, da für die Diskrepanz ein Analogon des Subsumptionssatzes nicht gilt.

Da die Eigenschaft eines „Maßpunktes" bzw. eines „Diskrepanzpunktes" $\mathfrak{p}$ sich nur auf die in der nächsten Umgebung von $\mathfrak{p}$ befindlichen Punkte von E bezieht und von den ferner gelegenen Punkten völlig unabhängig ist (es kommt immer nur der Durchschnitt $E\omega$ mit einer „Umgebung" ω von $\mathfrak{p}$ in Betracht), so kann die „Maßmenge" bzw. „Diskrepanzmenge" ebenso gut wie für beschränkte auch für unbeschränkte Punktmengen E definiert werden, und die Sätze 1—3 behalten auch für solche Mengen ihre Gültigkeit. So ergeben sich als naturgemäße Erweiterungen der ursprünglichen Festsetzungen die Definitionen:

Eine (beschränkte oder unbeschränkte) Punktmenge E heißt eine „Nullmenge", wenn sie keine Maßpunkte besitzt, ihr Durchschnitt $E\lambda$ mit jedem endlichen Intervall also das Maß Null hat; eine Menge heißt „meßbar", wenn sie keine Diskrepanzpunkte besitzt, wenn sie also in keinem endlichen Intervall diskrepant ist.

Die Sätze über „Nullmengen" bzw. „meßbare Mengen behalten dann sämtlich ihre Gültigkeit, soweit ihre in endlichen Intervallen enthaltenen Teilmengen in Betracht kommen. Nur brauchen nicht mehr ein „Gesamtmaß" $\mathfrak{m}E$ oder eine „Gesamtdiskrepanz" $\mathfrak{d}E$ als endliche Zahlen zu existieren. Doch können solche in besonderen Fällen als Grenzwerte definiert werden. Es sei nämlich $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ eine unbegrenzte Folge von (exklusiven oder nicht exklusiven) Intervallen von der Beschaffenheit, daß jeder Punkt von E in mindestens einem dieser Intervalle gelegen ist, so daß die Summe

$$\Sigma = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots,$$

die sich auch ins Unendliche erstrecken kann, die gesamte Menge E überdeckt. Bezeichnen wir nun mit Σ_n die n-te Teilsumme

$$\Sigma_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n,$$

so können wir setzen

$$\mathfrak{m}E = \lim_{n=\infty} \mathfrak{m}(E\Sigma_n), \qquad \mathfrak{d}E = \lim_{n=\infty} \mathfrak{d}(E\Sigma_n),$$

insofern diese Grenzwerte existieren.

Da nun für alle Intervallsummen nach (6 a) und (7 a) jedenfalls

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}E\Sigma_n &\leqq \mathfrak{m}E\lambda_1 + \mathfrak{m}E\lambda_2 + \cdots + \mathfrak{m}E\lambda_n \\ \mathfrak{d}E\Sigma_n &\leqq \mathfrak{d}E\lambda_1 + \mathfrak{d}E\lambda_2 + \cdots + \mathfrak{d}E\lambda_n, \end{aligned}$$

so wird allgemein

$$(20) \qquad \mathfrak{m}E = \lim_{n=\infty} \mathfrak{m}(E\Sigma_n) \leqq \mathfrak{m}E\lambda_1 + \mathfrak{m}E\lambda_2 + \cdots$$

$$(21) \qquad \mathfrak{d}E = \lim_{n=\infty} \mathfrak{d}(E\Sigma_n) \leqq \mathfrak{d}E\lambda_1 + \mathfrak{d}E\lambda_2 + \cdots.$$

Sind aber die Intervalle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ untereinander exklusiv, so wird nach (13) und (14), da Intervalle immer meßbar sind,

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}E\Sigma_n &= \mathfrak{m}E\lambda_1 + \cdots + \mathfrak{m}E\lambda_n \\ \mathfrak{d}E\Sigma_n &= \mathfrak{d}E\lambda_1 + \cdots + \mathfrak{d}E\lambda_n, \end{aligned}$$

und somit

$$(20\,a) \qquad \mathfrak{m}E = \mathfrak{m}E\lambda_1 + \mathfrak{m}E\lambda_2 + \cdots$$

$$(21\,a) \qquad \mathfrak{d}E = \mathfrak{d}E\lambda_1 + \mathfrak{d}E\lambda_2 + \cdots.$$

Insbesondere ergibt sich hieraus für „Nullmengen" E stets ein „Gesamtmaß" 0 und für „meßbare" Mengen eine „Gesamtdiskrepanz" 0.

Haben die (unbeschränkten) Mengen E_1 und E_2 endliche Maßzahlen bzw. Diskrepanzen, so ergibt sich aus den Hauptformeln (3) und (5) für jede Intervallsumme Σ_n

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}(E_1 + E_2)\Sigma_n + \mathfrak{m}E_1E_2\Sigma_n &\leqq \mathfrak{m}E_1\Sigma_n + \mathfrak{m}E_2\Sigma_n \\ \mathfrak{d}(E_1 + E_2)\Sigma_n + \mathfrak{d}E_1E_2\Sigma_n &\leqq \mathfrak{d}E_1\Sigma_n + \mathfrak{d}E_2\Sigma_n \end{aligned}$$

und, wenn die Grenzwerte $\mathfrak{m}E_1$, $\mathfrak{m}E_2$ bzw. $\mathfrak{d}E_1$, $\mathfrak{d}E_2$ existieren, wieder

$$\mathfrak{m}(E_1 + E_2) + \mathfrak{m}E_1E_2 \leqq \mathfrak{m}E_1 + \mathfrak{m}E_2$$
$$\mathfrak{d}(E_1 + E_2) + \mathfrak{d}E_1E_2 \leqq \mathfrak{d}E_1 + \mathfrak{d}E_2,$$

und entsprechend für endliche und abzählbar unendliche Summen

$$\mathfrak{m}(E_1 + E_2 + \cdots) \leqq \mathfrak{m}E_1 + \mathfrak{m}E_2 + \cdots$$
$$\mathfrak{d}(E_1 + E_2 + \cdots) \leqq \mathfrak{d}E_1 + \mathfrak{d}E_2 + \cdots,$$

wobei für „meßbare" und exklusive Summanden wieder das Gleichheitszeichen gelten muß.

Auch der Begriff der „maßgleichen Hülle" läßt sich ausdehnen auf unbeschränkte Punktmengen vermöge der folgenden Betrachtung. Ist A maßgleiche Hülle von E im „Gesamtintervall" Λ, und λ irgendein Teilintervall, so ist nach S. 161 auch $A\lambda$ maßgleiche Hülle von $E\lambda$. Besitzt ferner die unbeschränkte Punktmenge E in den exklusiven Intervallen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die maßgleichen Hüllen $A_1, A_2, \ldots$, also $\mathfrak{m}E\lambda_n = \mathfrak{m}A_n = \mathfrak{m}A_n\lambda_n$ und ist λ irgendein weiteres (endliches) Intervall, so ist auch

$$\mathfrak{m}E\lambda_n\lambda = \mathfrak{m}A_n\lambda,$$

sowie

$$\mathfrak{m}E(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots)\lambda = \mathfrak{m}(A_1 + A_2 + \cdots)\lambda = \mathfrak{m}A\lambda,$$

wobei die Summe auf die Intervalle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ beschränkt werden kann, die zur Überdeckung von λ ausreichen, also

$$\mathfrak{m}E\lambda = \mathfrak{m}A\lambda,$$

d. h. die Punktmenge $A = A_1 + A_2 + \cdots$ spielt in *jedem* „Gesamtintervall" λ für E die Rolle einer „maßgleichen Hülle", die dann noch gemäß Satz 3 auf ihre Maßmenge $\mathfrak{M}A = \mathfrak{M}E$ „reduziert" werden kann.

Ebenso kann auch für $\bar{E}$, die Komplementärmenge von E in bezug auf den (unendlichen) Gesamtraum, eine entsprechende „maßgleiche Hülle"

$$B = B_1 + B_2 + \cdots$$

konstruiert werden, so daß in *jedem* Intervall λ

$$\mathfrak{m}\bar{E}\lambda = \mathfrak{m}B\lambda$$

wird. Dann wird auch in jedem Intervall λ

$$\mathfrak{d}(E\lambda) = \mathfrak{m}(AB\lambda),$$

und der (wieder nach Satz 3 auf seine Maßmenge $\mathfrak{M}(AB) = \mathfrak{D}E$ reduzierbare) Durchschnitt

$$C = AB \in \mathfrak{D}E$$

(die „Diskrepanzhülle" von E) hat dann die Eigenschaft, daß ihr Maß in jedem Intervalle die Diskrepanz der „Ausgangsmenge" E darstellt, wiewohl das „Gesamtintervall" jetzt unendlich ist und damit die ursprüngliche Definition der Diskrepanz (als Differenz des „äußeren" und „inneren Maßes" bei *Lebesgue*) gemäß der Formel (4) ihre Bedeutung verliert.

Freiburg i. Br., den 12. Juni 1927.

Über konvexe Figuren.

Von *Heinrich Tietze* in München.

1. Die folgenden Zeilen beschäftigen sich mit einer Frage der Charakterisierung konvexer Figuren, wobei wir uns zunächst auf solche in der Ebene beschränken, ein Fall, auf den sich der Fall konvexer n-dimensionaler Figuren sehr leicht (ohne Induktion von $n-1$ auf n) wird zurückführen lassen (Nr. 3). Die konvexe Figur (Punktmenge) sei dabei, wie längst allgemein üblich [1]), definiert als eine solche, die mit je zweien ihrer Punkte die ganze Verbindungsstrecke enthält.

Hat eine abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{M}$ die *Eigenschaft* (E), daß durch jeden Punkt ihrer Begrenzung wenigstens eine *Stützgerade* geht, so ist bekanntlich stets entweder $\mathfrak{M}$ selbst konvex oder $\mathfrak{M}$ ist enthalten in der Begrenzung einer konvexen abgeschlossenen Menge. Umgekehrt besitzt jede Menge von einer dieser beiden Arten die Eigenschaft (E). Beschränkt man sich auf abgeschlossene Mengen $\mathfrak{M}$, welche innere Punkte besitzen, so ist also die Eigenschaft (E) für die Konvexität von $\mathfrak{M}$ hinreichend. Wir fragen nun, ob für die Konvexität von $\mathfrak{M}$ auch die schwächere *Eigenschaft* (F) hinreichend ist, daß durch jeden Punkt X der Begrenzung von $\mathfrak{M}$ eine *Stützstrecke* geht, d. h. daß jeder Begrenzungspunkt X der Mittelpunkt einer Strecke AB ist, so daß es im Kreis über AB als Durchmesser auf einer der beiden Seiten von AB keinen Punkt von $\mathfrak{M}$ gibt.

Es ist leicht an Beispielen zu sehen, daß die Antwort auf diese Frage allgemein zu verneinen ist (Nr. 4); hingegen läßt sich zeigen, daß jedenfalls bei Hinzunahme der Voraussetzung, daß $\mathfrak{M}$ die abgeschlossene Hülle einer zusammenhängenden offenen beschränkten Menge ist, die Eigenschaft (F) für die Konvexität von $\mathfrak{M}$ hinreicht.

2. Wir behaupten also den Satz:

Ist $\mathfrak{M}$ die abgeschlossene Hülle einer zusammenhängenden offenen beschränkten ebenen Menge $\mathfrak{O}_0$, dann ist die in Nr. 1 erklärte Eigenschaft (F) hinreichend (und selbstverständlich auch notwendig) dafür, daß $\mathfrak{M}$ konvex ist.

Um diesen Satz zu beweisen, werde von einer Menge $\mathfrak{M}$ vorausgesetzt, sie sei die abgeschlossene Hülle einer zusammenhängenden beschränkten offenen Menge $\mathfrak{O}_0$ und es sei $\mathfrak{M}$ nicht-konvex; wir haben dann nur zu zeigen, daß $\mathfrak{M}$ nicht die Eigenschaft (F) hat.

[1]) Vgl. zum Beispiel *Steinitz* im 143. Bande dieses sein hundertjähriges Jubiläum feiernden Journals, S. 150.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{D}$ ($\supseteqq \mathfrak{D}_0$) die Menge der inneren Punkte [2]) von $\mathfrak{M}$ (natürlich ist zugleich mit $\mathfrak{D}_0$ auch $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{D}$ zusammenhängend), mit $\mathfrak{L}$ die Begrenzung von $\mathfrak{M}$ und mit $\mathfrak{N}$ die Menge der Außenpunkte, d. h. der nicht zu $\mathfrak{M} = \mathfrak{D} + \mathfrak{L}$ gehörigen Punkte. Da $\mathfrak{M}$ nicht konvex ist, so ist die konvexe Hülle $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{M}$ verschieden von $\mathfrak{M}$. Es liegt daher einer der beiden Fälle vor: I. Die Begrenzung von $\mathfrak{K}$ ist nicht in der Begrenzung von $\mathfrak{M}$ enthalten und enthält also wenigstens eine Strecke $A_1 A_2$, deren innere Punkte zu $\mathfrak{N}$, deren Endpunkte aber zu $\mathfrak{L}$ gehören; II. Die Begrenzung von $\mathfrak{K}$ gehört vollständig zur Begrenzung von $\mathfrak{M}$ und das Innere von $\mathfrak{K}$ enthält Punkte von $\mathfrak{N}$.

Im Falle I werde mit g die Gerade $A_1 A_2$ bezeichnet (die also Stützgerade von $\mathfrak{K}$ ist); positive bzw. negative Seite von g heiße diejenige, auf der $\mathfrak{K}$ liegt bzw. nicht liegt. Für jede der im folgenden auftretenden zu g parallelen Geraden $g', \ldots$ werde die positive und negative Seite entsprechend erklärt, so daß der von zwei solchen Parallelen wie g und g' begrenzte Streifen auf der positiven Seite der einen und auf der negativen Seite der anderen liegt.

Sei P ein Punkt auf g zwischen A_1 und A_2. Mit g_1 bzw. g_2 bezeichnen wir von den beiden Halbstrahlen, in die g durch P zerlegt wird, denjenigen, der A_1 bzw. A_2 enthält. Von P aus ziehen wir nach der positiven Seite von g eine zu g senkrechte Strecke $p = PP''$, die wir so kurz annehmen können, daß sie ganz in $\mathfrak{N}$ liegt. P' sei ein Punkt auf p zwischen P und P''; g' sei die Parallele zu g durch P'; von den beiden Halbstrahlen, in die g' durch P' zerlegt wird, werde der zu g_1 (zu g_2) gleichsinnig parallele mit g_1' (mit g_2') bezeichnet. Die Vereinigung h_1 der auf g_1, auf g_1' und auf der Strecke PP' liegenden Punkte zerlegt die Ebene in zwei Teile, der eine ein Halb-Parallelstreifen $\mathfrak{H}_1$, der andere $\overline{\mathfrak{H}_1}$ den Punkt A_2 enthaltend. Da in jeder Nähe von A_1 Punkte von $\mathfrak{D}$ liegen (natürlich nur auf der positiven Seite von g), so gibt es Punkte von $\mathfrak{D}$ im Inneren von $\mathfrak{H}_1$. Sei A_1^* ein solcher Punkt. In analoger Weise sei A_2^* ein Punkt von $\mathfrak{D}$ im Inneren des Halbstreifens $\mathfrak{H}_2$, der von der Vereinigung h_2 der Punktmengen g_2, g_2' und PP' begrenzt wird. Da $\mathfrak{D}$ zusammenhängend ist, gibt es einen ganz in $\mathfrak{D}$ verlaufenden einfachen Streckenzug s von A_1^* nach A_2^*. Da A_1^* in $\mathfrak{H}_1$, A_2^* in $\overline{\mathfrak{H}_1}$ liegt, muß s die Begrenzung h_1 von $\mathfrak{H}_1$ treffen, was nur in Punkten von g_1' geschehen kann, da g_1 und PP' keinen Punkt von $\mathfrak{D}$ enthalten. Sei A_1' unter den Treffpunkten von s mit g_1' der letzte (wenn s von A_1^* nach A_2^* durchlaufen wird), so daß alle Punkte auf s zwischen A_1' und A_2^* außerhalb $\mathfrak{H}_1$ liegen. Ferner sei A_2' unter den Treffpunkten von s mit g_2' (wenn s von A_2^* bis A_1' durchlaufen wird) der letzte, so daß das Stück s' der zwischen A_1' und A_2' liegenden Punkte von s auf der positiven (den Punkt P'' enthaltenden) Seite von g' liegt.

Zusammen mit der Strecke $A_1' A_2'$ bildet s' ein einfaches geschlossenes Polygon [3]) q. Unter allen Punkten von s' gibt es einen oder mehrere mit größtem Abstand

---

[2]) Natürlich kann $\mathfrak{D}_0$ ein echter Teil von $\mathfrak{D}$ sein (z. B. wenn $\mathfrak{D}_0$ die Menge der Innenpunkte eines Kreises mit Ausnahme des Mittelpunktes oder mit Ausnahme aller Punkte eines Radius, $\mathfrak{M}$ also die abgeschlossene Kreisfläche und $\mathfrak{D}$ die Menge aller ihrer Innenpunkte ist).

[3]) Wenn ein *Jordan*scher Kurvenbogen b von A_1 nach A_2 existiert, der mit Ausnahme seiner Endpunkte ganz in $\mathfrak{D}$ verläuft und also zusammen mit der Strecke $A_1 A_2$ eine geschlossene *Jordan*-

von g. Sei g'''' die durch diese Punkte gelegte Parallele zu g, so daß q ganz dem von g' und g'''' begrenzten Parallelstreifen angehört. Im Inneren von q liegt der zu $\mathfrak{R}$ gehörige Punkt P''. Sei $\mathfrak{R}_0$ die Menge aller im Inneren von q befindlichen Punkte von $\mathfrak{R}$ (die also nicht leer ist) und sei $\mathfrak{R}^*$ die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{R}_0$. Sei P''' ein Punkt von $\mathfrak{R}^*$ mit größtem Abstand von g und sei g''' die Parallele zu g durch P'''. Dann liegt g''' zwischen g' und g''''. (Denn da eine ganze Umgebung von P'' zu $\mathfrak{R}$ und daher zu $\mathfrak{R}^*$ gehört, so liegt P''' weiter von g entfernt als P'', also weiter als P', d. h. als g'; und da auf g'''' kein Punkt des Inneren von q liegt und die auf g'''' liegenden Punkte von q zu s, also zu $\mathfrak{O}$ gehören, so kann ein Punkt auf g'''' weder zu $\mathfrak{R}_0$ gehören noch Häufungspunkt von $\mathfrak{R}_0$ sein, d. h. P''' muß näher an g liegen als g'''').

Durch P''' wird g''' in zwei Halbstrahlen g_1''' und g_2''' zerlegt (g_1''' zu g_1 und g_2''' zu g_2 gleichsinnig parallel). Durchlaufen wir g_1''' von P''' aus, so müssen wir, da P''' im Innern von q liegt, s' treffen. Sei A_1''' der erste Treffpunkt. Wir können annehmen, daß zwischen P''' und A_1''' kein Punkt von $\mathfrak{R}^*$ liegt, da wir andernfalls P''' durch den an A_1''' nächstgelegenen zu $\mathfrak{R}^*$ gehörenden Punkt der Strecke $P'''A_1'''$ ersetzen können. Demgemäß gehören alle Punkte der Strecke $P'''A_1'''$, ausgenommen P''', zu $\mathfrak{O}$, während P''' ein Punkt des Randes $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{M}$ ist.

Der Punkt P''' ist nun ein solcher Randpunkt von $\mathfrak{M}$, daß es für ihn keine Stützstrecke an $\mathfrak{M}$ gibt. Denn da alle in genügender Nähe von P''' auf der positiven Seite von g''' liegenden Punkte zu $\mathfrak{M}$ gehören, so müßte eine solche Stützstrecke durch P''' notwendig auf g''' liegen. Da aber jeder Punkt zwischen P''' und A_1''' eine ganze zu $\mathfrak{O}$ und somit zu $\mathfrak{M}$ gehörige Umgebung hat, so kann auch auf g''' keine Stützstrecke durch P''' liegen. Die Menge $\mathfrak{M}$ hat also nicht die Eigenschaft (F).

Im Falle II sei P ein zu $\mathfrak{R}$ und zum Inneren von $\mathfrak{K}$ gehöriger Punkt. Wird auf jedem von P ausgehenden Halbstrahl t der auf t liegende Begrenzungspunkt T von $\mathfrak{K}$ markiert, so kann von allen diesen Strecken PT höchstens eine frei von Punkten von $\mathfrak{O}$ sein (da andernfalls $\mathfrak{O}$ nicht zusammenhängend sein könnte). Sei nun g eine Gerade durch P, so daß jeder der Halbstrahlen g_1, g_2, in die g durch P zerfällt, Punkte von $\mathfrak{O}$ enthält. Sei $A_1(A_2)$ ein Punkt von $\mathfrak{O}$ auf $g_1(g_2)$, s ein einfacher Streckenzug in $\mathfrak{O}$ von A_1 nach A_2, PP'' ein Lot auf g ins Innere des von s und der Strecke A_1A_2 gebildeten Polygons q. Unter den Punkten von $\mathfrak{R} + \mathfrak{L}$, die im Inneren von q und auf der Seite von g, auf der P'' liegt, am weitesten von g entfernt sind, findet man dann analog wie im Falle I einen Punkt P''' von $\mathfrak{L}$ ohne Stützstrecke an $\mathfrak{M}$. — Obiger Satz ist damit bewiesen.

3. Wir gehen an die Verallgemeinerung des Satzes von Nr. 2 auf n Dimensionen.

Sei $X = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ein Punkt der Begrenzung einer Menge $\mathfrak{M}$ des n-dimensionalen Raumes. Wenn es dann eine $(n-1)$-dimensionale Ebene

---

kurve j bildet, so könnte man die besprochene Konstruktion von s' und q sparen, anstatt s' und q einfach b und j sowie im folgenden anstelle von $\mathfrak{R}_0$ die Menge aller Punkte von $\mathfrak{R}$ im Innern von j nehmen; man käme dann wie im Text zu einem Randpunkt P''' ohne Stützstrecke. Um so zu verfahren, müßte man aber wissen, daß A_1 und A_2 erreichbare Randpunkte der offenen Menge $\mathfrak{O}$ sind.

$\Sigma a_i(x_i - x_i^0) = 0$ durch X und eine Kugel um X als Mittelpunkt $\Sigma(x_i - x_i^0)^2 - r^2 \leqq 0$ gibt $(r > 0)$, so daß *in dieser Kugel* auf der einen Seite der Ebene, etwa für $\Sigma a_i(x_i - x_i^0) > 0$, kein Punkt von $\mathfrak{M}$ liegt, dann soll die $(n-1)$-dimensionale Kugel:

$$\sum a_i(x_i - x_i^0) = 0, \qquad \sum (x_i - x_i^0)^2 - r^2 \leqq 0$$

als $(n-1)$-dimensionale *Stützscheibe* an $\mathfrak{M}$ im Punkte X bezeichnet werden. Von einer Menge $\mathfrak{M}$ sagen wir, sie habe die *Eigenschaft* (F), wenn es in jedem Punkt ihrer Begrenzung eine Stützscheibe an $\mathfrak{M}$ gibt.

Den Satz, den wir in Verallgemeinerung von Nr. 2 beweisen wollen, können wir dann so aussprechen:

Für die beschränkten abgeschlossenen Mengen $\mathfrak{M}$ des n-dimensionalen Raumes, welche innere Punkte besitzen, die eine zusammenhängende (natürlich offene) Menge $\mathfrak{O}$ bilden[4]*, deren abgeschlossene Hülle $\mathfrak{M}$ ist, ist die Eigenschaft (F) hinreichend (und selbstverständlich auch notwendig) dafür, daß $\mathfrak{M}$ konvex ist.*

Zum Beweise betrachten wir zwei Punkte A, B aus $\mathfrak{O}$, die sich nach Voraussetzung durch einen ganz in $\mathfrak{O}$ liegenden Streckenzug $AC_1C_2 \ldots C_kB$ verbinden lassen.

Wir wollen zunächst den Fall betrachten, daß der Streckenzug aus nur zwei Strecken AC und CB besteht $(k = 1)$, die nicht in einer Geraden liegen. Die zweidimensionale Ebene $\mathfrak{R}_2$ durch A, B, C schneidet $\mathfrak{O}$ in einer nicht-leeren Menge $\mathfrak{O}_2^*$. Gleichgültig ob $\mathfrak{O}_2^*$ zusammenhängend ist oder nicht, so gehören jedenfalls A, B, C einem und demselben zusammenhängenden Teil $\mathfrak{O}_2$ von $\mathfrak{O}_2^*$ an. Die abgeschlossene Hülle $\mathfrak{M}_2$ von $\mathfrak{O}_2$ ist in dem Schnitt von $\mathfrak{R}_2$ mit $\mathfrak{M}$ enthalten. Jeder Randpunkt X von $\mathfrak{M}_2$ ist also Randpunkt von $\mathfrak{M}$ und zufolge der vorausgesetzten Eigenschaft (F) gibt es in einer durch X gehenden $(n-1)$-dimensionalen Ebene $\mathfrak{E}$ eine Stützscheibe $\mathfrak{S}$. Es gibt also in $\mathfrak{E}$ nicht in beliebiger Nähe von X Punkte aus $\mathfrak{O}$. Da andererseits in $\mathfrak{R}_2$ in jeder Nähe von X Punkte aus $\mathfrak{O}$ liegen, so kann $\mathfrak{R}_2$ nicht ganz in $\mathfrak{E}$ liegen und muß somit $\mathfrak{E}$ in einer Geraden g schneiden. Der Schnitt von g mit $\mathfrak{S}$ ist dann eine Stützstrecke in X an $\mathfrak{M}_2$. Somit erfüllt $\mathfrak{M}_2$ alle Voraussetzungen des in Nr. 2 erledigten zweidimensionalen Falles unseres Satzes und ist daher konvex. Die Strecke AB liegt also ganz in $\mathfrak{M}_2$, und zwar natürlich in $\mathfrak{O}_2$ und damit in $\mathfrak{O}$. (Das gleiche gilt ganz von selbst in dem Falle, daß AC und CB in einer Geraden liegen.)

Daraus folgt für einen beliebigen Streckenzug $AC_1 \ldots C_{k-1}C_kB$ $(k > 1)$ in $\mathfrak{O}$, daß die Strecke $C_{k-1}B$ ganz in $\mathfrak{O}$ liegt; daher auch die Strecke $C_{k-2}B$, usw. schließlich auch die Strecke AB. Die Menge $\mathfrak{O}$ aller inneren Punkte von $\mathfrak{M}$ ist also konvex und daher auch $\mathfrak{M}$ selbst.

4. Beispiele von ebenen Punktmengen, die die Eigenschaft (F) haben (in jedem Randpunkt eine Stützstrecke besitzen), ohne konvex zu sein:

A) Es sei $\mathfrak{A}$ die Menge der Punkte auf einem beliebigen (ungeschlossenen oder geschlossenen) einfachen Streckenzug. $\mathfrak{A}$ braucht dann weder konvex noch

[4]) Diese Formulierung besagt dasselbe wie: $\mathfrak{M}$ ist die abgeschlossene Hülle einer zusammenhängenden offenen beschränkten Menge $\mathfrak{O}_0$.

in der Begrenzung einer konvexen Menge enthalten zu sein. Im Gegensatz zur Menge $\mathfrak{M}$ des Satzes in Nr. 2 enthält $\mathfrak{A}$ keine inneren Punkte.

B) Sei $\mathfrak{A}$ die Menge der Punkte zweier getrennt liegender abgeschlossener Kreisflächen. Im Gegensatz zur Menge $\mathfrak{M}$ des Satzes in Nr. 2 ist $\mathfrak{M}$ nicht zusammenhängend.

C) Sei $\mathfrak{A}$ die Menge der Punkte, die entweder der Strecke $0 \leqq x \leqq 1$ der x-Achse oder einer der (zu je zweien getrennt liegenden) Kreisflächen $(x - x_0)^2 + y^2 + 2yr \leqq 0$ angehören, wobei x_0 irgendein endlicher dyadischer Bruch $\geqq 0$ und $\leqq 1$ ist und $r = \frac{1}{4^{\nu+1}}$, wenn x_0 genau ν dyadische Stellen hat ($2^\nu \cdot x_0$ ganz und ungerade, bzw. $\nu = 0$ für $x_0 = 0$). $\mathfrak{A}$ ist zusammenhängend, und $\mathfrak{A}$ ist auch die abgeschlossene Hülle der Menge der Innenpunkte von $\mathfrak{A}$. Im Gegensatz zur Menge $\mathfrak{M}$ des Satzes in Nr. 2 ist für $\mathfrak{A}$ diese Menge der Innenpunkte aber nicht zusammenhängend.

Im Beispiel C) gibt es zu jeder positiven Zahl ε Randpunkte X von $\mathfrak{A}$, so daß keine Stützstrecke in X an $\mathfrak{A}$ eine Länge $\geqq \varepsilon$ hat.

5. (Zusatz bei der Korrektur.) Die Sätze von Nr. 2 und 3 gelten auch noch, wenn man die Voraussetzung, die Mengen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{O}_0$, $\mathfrak{O}$ seien beschränkt, fallen läßt. Es ist dann nur der Beweis von Nr. 2 im Falle II etwas abzuändern: Falls es einen von $\mathfrak{O}$ freien Halbstrahl $t = t_0$ gibt, so drehen wir t_0 nach links und rechts in die äußersten Lagen t' und t'', in denen der Halbstrahl noch frei von $\mathfrak{O}$ ist. Der Winkel $t't''$ ($\geqq 0$) muß dann $< \pi$ sein, da sonst eine ganze Halbebene auf einer Seite einer Geraden durch P frei von $\mathfrak{O}$ (und $\mathfrak{M}$) wäre und P nicht innerer Punkt von $\mathfrak{R}$ sein könnte. Außerhalb des Winkels $t't''$ aber kann kein weiterer Halbstrahl t frei von $\mathfrak{O}$ sein, da $\mathfrak{O}$ sonst nicht zusammenhängend wäre. Es gibt also sicher eine Gerade g durch P, die auf jedem ihrer Halbstrahlen g_1, g_2 Punkte von $\mathfrak{O}$ enthält; usw. wie in Nr. 2.

Auf einen zweiten kürzeren Beweis für den Satz in Nr. 2, den ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn *H. Prüfer* verdanke, komme ich an anderer Stelle zurück.

München, den 12. März 1927.

Untersuchungen über Lückenzahlen und den *Goldbach*schen Satz.

Von *Robert Haußner* in Jena.

Ausgehend von den *Stäckel*schen Arbeiten über Lückenzahlen [1]) hatte ich in einer früheren Arbeit [2]) wichtige Ergebnisse derselben, die für den *Goldbach*schen Satz von besonderer Bedeutung sind, auf einem wesentlich andern Wege als *Stäckel* herleiten und neue Resultate hinzufügen können. In dieser Arbeit soll der Begriff der Lückenzahlen verallgemeinert und gezeigt werden, daß auch dann noch alle früheren Beziehungen gültig sind. Das angewandte Verfahren legt wieder die erzeugende Funktion zugrunde, stellt diese Funktion aber wesentlich anders dar. Dadurch gelingt es nicht nur, alle früheren Formeln leicht zu gewinnen, sondern das *Gewicht* der Lückenzahlen r-ter Stufe und sein Wert ergeben sich zwangsläufig, während seine Einführung bei *Stäckel*, der seine wichtige Bedeutung voll erkannt hat, fast wie ein glücklicher Griff anmutet. Die Richtigkeit des von *Stäckel* aufgestellten Näherungswertes für die Anzahl der Darstellungen einer geraden Zahl als Summe zweier Lückenzahlen r-ter Stufe konnte ich früher nur für die geraden Zahlen außerhalb des Hauptbereiches [3]) zeigen, während sie für die Zahlen des Hauptbereiches ihren heuristischen Charakter, den sie bei *Stäckel* überhaupt besitzt, behielt; jetzt führe ich den Nachweis ihrer allgemeinen Richtigkeit streng in dem Sinne, daß die Glieder genau angegeben sind, die die Näherungsformel gegenüber der strengen Formel vernachlässigt. Die in der ersteren Formel begangenen Fehler fließen aus zwei Quellen, die sich, wie es scheint, meistens gegenseitig günstig beeinflussen. Für die begangenen Fehler lassen sich Grenzen angeben, zwischen denen sie liegen. Bei einer passend gewählten Voraussetzung lassen sich diese Grenzen sogar sehr erheblich einander nähern, allerdings noch immer nicht soweit, daß die Zerlegbarkeit einer jeden ganzen Zahl in zwei Lückenzahlen r-ter Stufe dadurch bewiesen werden kann. Läßt sich dies erreichen, so ist auch der

---

[1]) *Die Lückenzahlen r-ter Stufe und die Darstellung der geraden Zahlen als Summen und Differenzen ungerader Primzahlen.* Sitzungsber. der Heidelberger Akad. d. Wiss., math.-naturwiss. Klasse, Abt. A, Jahrgang 1917, 15. Abhandl.; Jahrgang 1918, 2. und 14. Abhandl.; Jahrgang 1922, 10. Abhandl.

[2]) *Über die Stäckelschen Lückenzahlen und den Goldbachschen Satz.* Jahresbericht d. Deutschen Mathem.-Vereinigung 31 (1923), S. 115—124.

[3]) Formel (11), S. 119, bezw. Formel (C), S. 122, der vorstehend genannten Arbeit.

*Goldbach*sche Satz selbst bewiesen. Denn alle diese Betrachtungen über Lückenzahlen lassen sich ohne weiteres auf Primzahlen übertragen. Die Schwierigkeiten, die sich der Beantwortung vieler Fragen über Lückenzahlen entgegenstellen, sind die gleichen wie bei den entsprechenden Fragen über Primzahlen.

Meine Untersuchungen berühren sich mit denen von Herrn *V. Brun* [1]), in dessen Arbeiten auch Näherungsformeln für die Anzahl der Darstellung einer geraden Zahl als Summe zweier Primzahlen aufgestellt sind. Er benutzt dazu das Siebverfahren des *Eratosthenes*, mit dessen Hilfe auch ich die erzeugende Funktion für die Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl bilde. Herr *Brun* spricht die Vermutung [2]) aus, daß sich die *Goldbach*sche Behauptung mittelst des Siebverfahrens ohne Zuhilfenahme neuer Gedanken nicht beweisen lassen werde. Vielleicht vermag die Frage nach der Anzahl der positiven Lösungen einer diophantischen Gleichung mit zwei Unbekannten, die bis jetzt noch keine für die Zwecke dieser Untersuchung brauchbare Lösung gefunden hat, einen solchen neuen Gedanken abzugeben. Freilich wird auch die Lösung dieser Frage über diophantische Gleichungen sehr große Schwierigkeiten darbieten.

1.

Während *Stäckel* unter $p_1, p_2, \ldots, p_r$ die ersten r ungeraden Primzahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge $p_1 = 3, p_2 = 5, p_3 = 7, \ldots$ versteht, bezeichnen wir im allgemeinen damit r beliebige Primzahlen, in beliebiger Größenordnung aufeinander folgend, unter denen sich auch die Zahl 2 befinden kann, nicht aber die Einheit. Infolgedessen kann für die Darstellung einer ganzen Zahl als Summe zweier Lückenzahlen die Voraussetzung, daß sie eine gerade Zahl sei, fallen gelassen werden. Auf die unberechtigte Ausnahmestellung der Zahl 2 in den *Stäckel*schen Untersuchungen hat schon *Stäckels* Mitarbeiter, Herr *Weinreich*, in der Abhandlung [3]), die er nach *Stäckels* Tode veröffentlicht hat, hingewiesen, aber von ihrer Beseitigung, die größere Umänderungen zur Folge gehabt hätte, aus Pietät gegen seinen verstorbenen Lehrer abgesehen.

Unter den *Lückenzahlen* [4]) *r-ter Stufe der Primzahlen* $p_1, p_2, \ldots, p_r$ verstehen

---

[1]) a) *Über das Goldbachsche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare.* Archiv for Mathematik og Naturvidenskab **35** (1915), Nr. 8.

b) *La série* $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots$ *où les dénominateurs sont „nombres premiers jumeaux" est convergente ou finie.* Bulletin des Sciences Mathém. **43**, 2e série (1919).

c) *Le crible d'Eratosthène et le problème de Goldbach.* Videnskapsselskapets Skrifter I, Math.-Naturv. Klasse 1920, No. 3.

d) *Untersuchungen über das Siebverfahren des Eratosthenes.* Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. **33** (1924), S. 81—96.

[2]) vgl. Abhandlung d.), S. 91.

[3]) *P. Stäckel* und *W. Weinreich*, *Die Darstellung gerader Zahlen als Differenzen und Summen von Primzahlen.* Sitzungsber. der Heidelberger Akad. d. Wiss., math.-naturwiss. Klasse, Abt. A, Jahrgang 1922, 10. Abhandl.

[4]) Die von *Stäckel* betrachteten speziellen Lückenzahlen des Hauptbereiches sind, aber ohne so genannt zu sein, schon früher auf einige ihrer Eigenschaften untersucht worden von *F. Walla*, *Einige Eigenschaften der Zahlen, welche zum Produkt der ersten n Primzahlen prim und kleiner als dasselbe sind.* Arch. d. Math. u. Phys., 1. Reihe, 66. Teil, S. 353—357 (1881).

wir dann die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, die nach Streichung aller durch $p_1, p_2, \ldots, p_r$ teilbaren Zahlen übriggeblieben sind. Von ihnen bilden diejenigen, die kleiner sind als

$$(1) \qquad \mathsf{P}_r = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$$

den *Hauptbereich* der Lückenzahlen der durch $p_1, p_2, \ldots, p_r$ gegebenen r-ten Stufe. Zu diesen Zahlen des Hauptbereiches sind alle übrigen Lückenzahlen r-ter Stufe kongruent mod P_r, so daß alle Lückenzahlen r-ter Stufe in unendlich viele Bereiche, deren jeder ebensoviele Zahlen als der Hauptbereich enthält, angeordnet sind. In jedem Bereiche sind die Lückenzahlen symmetrisch zur Mitte des Bereiches; denn ist x eine Lückenzahl des Hauptbereiches, so offenbar auch $\mathsf{P}_r - x$. Die Anzahl der Lückenzahlen eines Bereiches ist gleich der *Euler*schen Funktion

$$(2) \qquad \varphi(\mathsf{P}_r) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_r - 1) .$$

Bei der *Stäckel*schen Definition der Lückenzahlen sind diese durch Angabe ihrer Stufe vollständig bestimmt. Dies ist bei unserer erweiterten Definition nicht mehr der Fall, weshalb die genauere Bezeichnung *Lückenzahlen r-ter Stufe der Primzahlen* $p_1, p_2, \ldots, p_r$ gewählt ist, da die einzelnen Primzahlen angegeben sein müssen, wenn das einzelne Lückenzahlensystem bestimmt sein soll. Wenn im folgenden von Lückenzahlen r-ter Stufe gesprochen wird, so sind darunter, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt ist, die zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_r$ gehörigen Lückenzahlen zu verstehen.

Bezeichnen l_r', l_r'' zwei verschiedene Lückenzahlen r-ter Stufe eines solchen Lückenzahlensystems und ist $n = l_r' + l_r''$, so soll $n = l_r'' + l_r'$ als von der ersten Zerlegung verschieden gezählt werden. Die Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl n in die Summe zweier solchen Lückenzahlen sei mit

$$G_r(n \mid p_1, p_2, \ldots, p_r)$$

oder, wenn kein Mißverständnis möglich ist, kurz mit

$$G_r(n \mid p)$$

bezeichnet. Für diese Zahlen G ist die erzeugende Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_r(n \mid p_1, p_2, \ldots, p_r) \cdot \zeta^n = \left(\sum\nolimits_{l_r} \zeta^{l_r}\right)^2 ,$$

wo die Summe auf der rechten Seite über alle zugehörigen Lückenzahlen r-ter Stufe zu erstrecken ist und sich nach dem Siebverfahren des *Eratosthenes* auch schreiben läßt:

$$\sum\nolimits_{l_r} \zeta^{l_r} = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \zeta^{\sigma} - \sum_{C_1} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \zeta^{\sigma p_1} + \sum_{C_2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \zeta^{\sigma p_1 p_2} \mp \cdots ;$$

hier sind die ersten Summen der rechtsstehenden Doppelsummen über alle Kombinationen ohne Wiederholung $C_1, C_2, \ldots, C_r$ zur ersten, zweiten, ..., r-ten Klasse der r Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_r$ zu bilden. Führen wir die inneren Summen aus, so wird, $\zeta < 1$ vorausgesetzt:

$$\sum\nolimits_{l_r} \zeta^{l_r} = \frac{\zeta}{1-\zeta} - \sum_{C_1} \frac{\zeta^{p_1}}{1-\zeta^{p_1}} + \sum_{C_2} \frac{\zeta^{p_1 p_2}}{1-\zeta^{p_1 p_2}} \mp \cdots$$

und

$$(3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} G_r(n\,|\,p)\cdot\zeta^n = \left\{\frac{\zeta}{1-\zeta} - \sum_{C_1}\frac{\zeta^{p_1}}{1-\zeta^{p_1}} + \sum_{C_2}\frac{\zeta^{p_1 p_2}}{1-\zeta^{p_1 p_2}} \mp \cdots\right\}^2.$$

Dividieren wir nun mit ζ^{n+1} und wenden die *Cauchy*sche Integralformel an, so ergibt sich für $G_r(n\,|\,p)$ der *genaue* Wert

$$(4)\qquad G_r(n\,|\,p) = \frac{1}{2\pi i}\int^{(k)}\left\{\frac{\zeta}{1-\zeta} - \sum_{C_1}\frac{\zeta^{p_1}}{1-\zeta^{p_1}} + \sum_{C_2}\frac{\zeta^{p_1 p_2}}{1-\zeta^{p_1 p_2}} \mp \cdots\right\}^2 \frac{1}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta,$$

wo als Integrationskurve (k) ein Kreis um den Nullpunkt mit einem Radius kleiner als 1 genommen werden mag. Die in dieser Formel auftretenden einzelnen Integrale haben die Gestalt

$$(5)\qquad \int^{(k)}\frac{\zeta^{a+b}}{(1-\zeta^a)(1-\zeta^b)\,\zeta^{n+1}}\,d\zeta\,,$$

wo a und b Zahlen aus der Reihe $1, p_1, p_2, \ldots, p_r$ oder Produkte beliebig vieler dieser Zahlen bedeuten, jedoch mit der Einschränkung, daß in keinem Produkte eine der Primzahlen mehrfach vorkommt. Aber nur der Teil dieses Integrales, der sich auf die Gestalt

$$A\int^{(k)}\frac{1}{\zeta}\,d\zeta$$

reduziert, liefert einen von Null verschiedenen Beitrag,

$$A\cdot 2\pi i\,.$$

A ist also der Zähler des Bruches mit dem Nenner ζ in der Partialbruchzerlegung von

$$\frac{\zeta^{a+b}}{(1-\zeta^a)(1-\zeta^b)\,\zeta^{n+1}}\,,$$

dessen Wert sich leicht als Determinante angeben läßt. $G_r(n\,|\,p)$ läßt sich folglich als algebraische Summe aller so aus (4) sich ergebenden Determinanten darstellen, womit aber für die Berechnung von $G_r(n\,|\,p)$ nicht viel gewonnen ist, sobald r nicht eine kleine Zahl ist.

Das Integral (5) läßt sich aber auch auf die Form

$$\int^{(k)}\frac{(\zeta^a+\zeta^{2a}+\zeta^{3a}+\cdots)(\zeta^b+\zeta^{2b}+\zeta^{3b}+\cdots)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta$$

bringen, und daher ist A auch gleich der Anzahl aller Produkte von der Form

$$\zeta^{\varrho a}\cdot\zeta^{\sigma b} = \zeta^{\varrho a+\sigma b} = \zeta^n \quad \text{für} \quad \varrho, \sigma \geqq 1\,.$$

Mithin ist A gleich der Anzahl der positiven Lösungen der diophantischen Gleichung

$$(6)\qquad \varrho\,a + \sigma\,b = n \qquad (\varrho, \sigma \geqq 1)\,.$$

2.

Wir können uns zunächst darauf beschränken, n als teilerfremd zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_r$ vorauszusetzen.

Dann können in der Gleichung (6) a und b keinen von 1 verschiedenen gemeinsamen Faktor besitzen, und es können nur solche Integrale (5), für die diese

Bedingung erfüllt ist, zu dem Werte von $G_r(n \mid p)$ einen Beitrag liefern. Alle übrigen Integrale scheiden für die weitere Betrachtung aus.

Die Anzahl A der positiven Lösungen von (6) ist

$$(7)\quad \begin{cases} \text{für } a = b = 1: & n-1\,, \\ \text{für } a = 1,\ b > 1 \text{ oder } a > 1,\ b = 1: & \left[\dfrac{n}{ab}\right], \\ \text{da weder } \varrho = 0, \text{ noch } \sigma = 0 \text{ zulässig ist, und} & \\ \text{für } a > 1,\ b > 1: & \left[\dfrac{n}{ab}\right] + \varepsilon_{a,b}\,, \end{cases}$$

wo in gewohnter Weise $\left[\dfrac{n}{ab}\right]$ die größte in $\dfrac{n}{ab}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet und $\varepsilon_{a,b} = 1$ oder 0 ist, je nachdem die Gleichung

$$(8)\qquad \varrho a + \sigma b = n^* - \left[\frac{n}{ab}\right] ab\,,$$

die künftighin kurz als *Restgleichung* bezeichnet sein mag, eine Lösung besitzt oder nicht. Für eine solche Lösung muß $0 < \varrho < b$, $0 < \sigma < a$ sein.

Alle Integrale (5), in denen das Produkt ab denselben Wert hat, liefern — abgesehen von den zugehörigen $\varepsilon_{a,b}$, deren Werte von der Verteilung der in ab vorkommenden Primzahlen auf a und b abhängen — dieselbe größte ganze Zahl $\left[\dfrac{n}{ab}\right]$ als Beitrag zu $G_r(n \mid p)$. Enthält ab von den r Primzahlen $\varkappa$ ($\varkappa \leqq r$) als Faktoren, so ergeben sich im ganzen $2^\varkappa$ verschiedene Fälle ihrer Verteilung auf a und b. Denn es kann $a = 1$ und b gleich dem Produkte aller $\varkappa$ Primzahlen sein, was $\binom{\varkappa}{0}$ Fälle ergibt; es kann a nur eine der $\varkappa$ Primzahlen, b alle übrigen $(\varkappa - 1)$ enthalten, was in $\binom{\varkappa}{1}$ Fällen möglich ist, und so fort bis zu dem Falle, daß in a alle $\varkappa$ Primzahlen vorkommen und $b = 1$ ist. So ergibt sich für jede einzelne Zahl $\left[\dfrac{n}{p_1 p_2 \cdots p_\varkappa}\right]$ der Faktor:

$$\binom{\varkappa}{0} + \binom{\varkappa}{1} + \cdots + \binom{\varkappa}{\varkappa} = 2^\varkappa\,.$$

Wir beachten noch, daß ein Integral (5) aus (4) mit positivem oder negativen Vorzeichen folgt, je nachdem $\varkappa$ gerade oder ungerade ist, und erhalten schließlich, wenn wir noch die Summe aller von 0 verschiedenen $(-1)^\varkappa \varepsilon_{a,b}$ mit

$$\mathsf{E}_r(n \mid p_1, p_2, \ldots, p_r) = \mathsf{E}_r(n \mid p) = \sum (-1)^\varkappa\, \varepsilon_{a,b}$$

bezeichnen,

$$(9)\qquad G_r(n \mid p) = n - 1 - 2 \sum_{C_1} \left[\frac{n}{p_1}\right] + 2^2 \sum_{C_2} \left[\frac{n}{p_1 p_2}\right]$$
$$\mp \cdots + (-1)^{r-1} 2^{r-1} \sum_{C_{r-1}} \left[\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_{r-1}}\right] + (-1)^r 2^r \left[\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_r}\right] + \mathsf{E}_r(n \mid p).$$

Zur Abkürzung führen wir noch die Bezeichnung

(10) $$\Phi_r(n\,|\,p_1, p_2, \ldots, p_r) = \Phi_r(n\,|\,p) = \left[n\left(1-2\cdot\frac{1}{p_1}\right)\left(1-2\cdot\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-2\cdot\frac{1}{p_r}\right)\right]$$

ein, wo die rechte Seite so zu verstehen ist, daß nach Auflösung des Produktes in jedem einzelnen Gliede $(-1)^{\varkappa}2^{\varkappa}\dfrac{n}{p_1 p_2\cdots p_\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, r)$ der Bruch durch die größte in ihm enthaltene ganze Zahl $\left[\dfrac{n}{p_1 p_2\cdots p_\varkappa}\right]$ ersetzt wird. Dann läßt sich die Gleichung (9) schreiben:

(11) $$G_r(n\,|\,p) = \Phi_r(n\,|\,p) - 1 + \mathsf{E}_r(n\,|\,p).$$

E_r ist stets eine gerade Zahl, da eine Restgleichung (8) mit $a = p_1 p_2\cdots p_\lambda$, $b = p_{\lambda+1}p_{\lambda+2}\cdots p_\varkappa$ für $\varepsilon_{a,b}$ denselben Wert ergibt, wie die Restgleichung mit $a = p_{\lambda+1}p_{\lambda+2}\cdots p_\varkappa$, $b = p_1 p_2\cdots p_\lambda$.

3.

Mit den Werten der Funktionen Φ, E, G für das Argument n stehen ihre Werte für die Argumente $\mathsf{P}_r + n$ und $\mathsf{P}_r - n$ in enger Verbindung. n kann für die folgenden Entwicklungen kleiner als P_r vorausgesetzt werden. Es ist

(12) $$\left[\frac{\mathsf{P}_r + n}{p_1 p_2\cdots p_\varkappa}\right] = \frac{\mathsf{P}_r}{p_1 p_2\cdots p_\varkappa} + \left[\frac{n}{p_1 p_2\cdots p_\varkappa}\right],$$

aber

(13) $$\left[\frac{\mathsf{P}_r - n}{p_1 p_2\cdots p_\varkappa}\right] = \frac{\mathsf{P}_r}{p_1 p_2\cdots p_\varkappa} - \left[\frac{n}{p_1 p_2\cdots p_\varkappa}\right] - 1,$$

und

$$\Phi_r(\mathsf{P}_r\,|\,p) = (p_1 - 2)(p_2 - 2)\cdots(p_r - 2),$$

folglich

(12′) $$\Phi_r(\mathsf{P}_r + n\,|\,p) = \Phi_r(\mathsf{P}_r\,|\,p) + \Phi_r(n\,|\,p)$$

(13′) $$\Phi_r(\mathsf{P}_r - n\,|\,p) = \Phi_r(\mathsf{P}_r\,|\,p) - \Phi_r(n\,|\,p) + 1 - (-1)^r;$$

da jedes einzelne Glied in $\Phi_r(\mathsf{P}_r - n\,|\,p)$, mit Ausnahme des ersten Gliedes $\mathsf{P}_r - n$, so oft -1 hinzuliefert, als der vor $\left[\dfrac{\mathsf{P}_r - n}{p_1 p_2\cdots p_\varkappa}\right]$ stehende Faktor (einschließlich des Vorzeichens) angibt, also $(-1)^{\varkappa}2^{\varkappa}$ mal, und es $\binom{r}{\varkappa}$ solcher Glieder gibt, so kommt zu $\Phi_r(\mathsf{P}_r\,|\,p) - \Phi_r(n\,|\,p)$ insgesamt $-\sum_{\varkappa=1}^{r}(-1)^{\varkappa}2^{\varkappa}\binom{r}{\varkappa} = 1-(-1)^r$ hinzu.

Für das Argument $\mathsf{P}_r + n$ hat E denselben Wert, wie für das Argument n; denn die rechten Seiten der Gleichungen (8) sind dieselben:

$$\mathsf{P}_r + n - \left[\frac{\mathsf{P}_r + n}{ab}\right]ab = n - \left[\frac{n}{ab}\right]ab,$$

also

(14) $$\mathsf{E}_r(\mathsf{P}_r + n\,|\,p) = \mathsf{E}_r(n\,|\,p).$$

Für das Argument $\mathsf{P}_r - n$ liefert der folgende *Satz* den Wert von E:

„Sind a und b größer als 1, so hat von den beiden Restgleichungen

$$\varrho a + \sigma b = n - \left[\frac{n}{ab}\right]ab = q$$

und

$$\varrho a + \sigma b = \mathsf{P}_r - n - \left[\frac{\mathsf{P}_r - n}{ab}\right] ab = \left\{\left[\frac{n}{ab}\right] + 1\right\} ab - n = ab - q$$

stets die eine Gleichung eine positive Lösung, die andere aber keine."

Beweis: Hätten beide Gleichungen positive Lösungen, die erste $\varrho = \varrho_1$, $\sigma = \sigma_1$, und die zweite $\varrho = \varrho_2$, $\sigma = \sigma_2$, wo ϱ_1, ϱ_2 zwischen 0 und b, σ_1, σ_2 zwischen 0 und a liegende ganze Zahlen sein müssen, so würde folgen:

$$(\varrho_1 + \varrho_2)\, a + (\sigma_1 + \sigma_2)\, b = ab,$$

also

$$\varrho_1 + \varrho_2 \equiv 0 \pmod{b}, \qquad \sigma_1 + \sigma_2 \equiv 0 \pmod{a}.$$

Daher müßte entweder

$$\begin{matrix} \varrho_1 + \varrho_2 = b \\ \sigma_1 + \sigma_2 = 0 \end{matrix} \qquad \text{oder} \qquad \begin{matrix} \varrho_1 + \varrho_2 = 0 \\ \sigma_1 + \sigma_2 = a \end{matrix}$$

sein; wegen der Intervalle, in denen die Lösungen liegen, ist jedoch weder $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$ noch $\varrho_1 + \varrho_2 = 0$ möglich.

Hätten aber beide Gleichungen keine positive Lösungen und wären

$$\varrho = \varrho_1, \quad \sigma = -\sigma_1; \qquad \varrho = \varrho_2, \quad \sigma = -\sigma_2$$

die Lösungen mit den kleinsten positiven Werten der ϱ, also auch den numerisch kleinsten Werten der σ, so würde die Summe der beiden Gleichungen

$$(\varrho_1 + \varrho_2)\, a - (\sigma_1 + \sigma_2)\, b = ab,$$

also $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$ liefern, was unmöglich ist.

Dagegen führt die Annahme, die erste Gleichung habe eine positive Lösung $\varrho_1 < b$, $\sigma_1 < a$, die zweite keine positive Lösung, aber die Lösung ϱ_2, $-\sigma_2$ zu keinem Widerspruche, denn die Gleichung

$$(\varrho_1 + \varrho_2)\, a + (\sigma_1 - \sigma_2)\, b = ab$$

wird durch $\varrho_2 = b - \varrho_1$, $\sigma_2 = \sigma_1$ befriedigt. W. z. b. w.

Nach diesem Satze ist die Summe

$$\mathsf{E}_r(n \mid p) + \mathsf{E}_r(\mathsf{P}_r - n \mid p)$$

gleich der Anzahl aller Restgleichungen mit $a > 1$, $b > 1$, zu denen die Formel (4) für eines der beiden Argumente n oder $\mathsf{P}_r - n$ führt.

Nun war bei Ableitung der Formel (9) gezeigt, daß für je $\varkappa$ Primzahlen die ganze Zahl $\left[\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_\varkappa}\right]$ den Faktor $(-1)^\varkappa 2^\varkappa$ hat; für alle Kombinationen sämtlicher r Primzahlen zur $\varkappa$-ten Klasse tritt dieser Faktor $\binom{r}{\varkappa}$ mal auf. Wegen (7) scheiden aber jetzt $\varkappa = 0$ und $\varkappa = 1$ aus; ferner sind für $\varkappa > 1$ die Anzahl der Fälle in Abzug zu bringen, in denen in der Restgleichung eine der beiden Zahlen a oder b die Zahl 1 ist, was in $2\binom{r}{\varkappa}$ Fällen zutrifft. Von der ersteren Gesamtzahl $\sum_{\varkappa=0}^{r} (-1)^\varkappa 2^\varkappa \binom{r}{\varkappa} = (-1)^r$ ist also in Abzug zu bringen:

$$1 - 2\binom{r}{1} + 2\binom{r}{2} \mp \cdots + (-1)^r 2\binom{r}{r} = -1 .$$

Folglich ist

$$\mathsf{E}_r(n\,|\,p) + \mathsf{E}_r(\mathsf{P}_r - n\,|\,p) = (-1)^r + 1 . \tag{15}$$

Die Gleichung (11) liefert daher auf Grund von (12′) und (14)

$$G_r(\mathsf{P}_r + n\,|\,p) - G_r(n\,|\,p) = \Phi_r(\mathsf{P}_r\,|\,p) \tag{16}$$

und auf Grund von (13′) und (15)

$$G_r(\mathsf{P}_r - n\,|\,p) + G_r(n\,|\,p) = \Phi_r(\mathsf{P}_r\,|\,p) . \tag{17}$$

4.

Um von den Lückenzahlen r-ter Stufe zu denen $(r+1)$-ter Stufe überzugehen, sind die zwei Fälle zu unterscheiden, daß die Zahl n auch durch die hinzutretende $(r+1)$-te Primzahl p_{r+1} nicht teilbar oder daß sie durch diese Zahl teilbar ist.

Im ersten Falle sind von allen Zerlegungen von n in zwei Lückenzahlen r-ter Stufe diejenigen zu streichen, bei denen eine der beiden Zahlen, in deren Summe n zerlegt wird, durch p_{r+1} teilbar ist. Die Anzahl dieser zu streichenden Zerlegungen ist

$$\begin{aligned} 2S_{r+1}(n\,|\,p_1, p_2, \ldots, p_r, p_{r+1}) &= 2S_{r+1}(n\,|\,p) \\ &= G_r(n\,|\,p_1, p_2, \ldots, p_r) - G_{r+1}(n|p_1, p_2, \ldots, p_r, p_{r+1}), \end{aligned} \tag{18}$$

also nach (11)

$$\begin{aligned} 2S_{r+1}(n\,|\,p) &= \Phi_r(n\,|\,p) - \Phi_{r+1}(n\,|\,p) + \mathsf{E}_r(n\,|\,p) - \mathsf{E}_{r+1}(n\,|\,p) \\ &= 2\Phi_r\Big(\frac{n}{p_{r+1}}\,|\,p\Big) + \mathsf{E}_r(n\,|\,p) - \mathsf{E}_{r+1}(n\,|\,p), \end{aligned}$$

wo $\Phi_r\Big(\dfrac{n}{p_{r+1}}\,|\,p\Big)$ nach der bei (10) gegebenen Vorschrift zu bilden ist und für $\dfrac{n}{p_{r+1}}$, $\dfrac{n}{p_1 p_2 \cdots p_\varkappa p_{r+1}}$ stets die in ihnen enthaltenen größten ganzen Zahlen zu nehmen sind.

In $\mathsf{E}_{r+1}(n\,|\,p) = \mathsf{E}_{r+1}(n; p_1, p_2, \ldots, p_r, p_{r+1})$ sind alle die ε enthalten, die in $\mathsf{E}_r(n\,|\,p)$ vorkommen und von den mit den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_r$ gebildeten Restgleichungen (8) herrühren. Die übrigen in $\mathsf{E}_{r+1}(n\,|\,p)$ enthaltenen $\varepsilon_{a,b}$ rühren von denjenigen Restgleichungen (8) her, bei denen a oder b noch die Primzahl p_{r+1} enthalten. Die Anzahl dieser letzteren $\varepsilon_{a,b}$ ist aber gleich der doppelten Anzahl aller Gleichungen

$$\varrho a + \sigma b\, p_{r+1} = n - \Big[\frac{n}{a b\, p_{r+1}}\Big] a b\, p_{r+1}, \tag{19}$$

die wir erhalten, wenn wir für a und b alle möglichen Produkte von $\varkappa$ der r Primzahlen $1, p_1, p_2, \ldots, p_r$ setzen, die der Bedingung genügen, daß a teilerfremd zu b und $a > 1$ ist, während $b = 1$ sein kann. Wird diese Differenz, deren beide Glieder nach der Bemerkung am Schlusse des 2. Abschnittes gerade Zahlen sind,

$$\mathsf{E}_r(n\,|\,p) - \mathsf{E}_{r+1}(n\,|\,p) = 2\Delta_{r+1}(n\,|\,p_1, p_2, \ldots, p_{r+1}) = 2\Delta_{r+1}(n\,|\,p) \tag{20}$$

gesetzt, so ergibt sich

$$(21) \qquad S_{r+1}(n\,|\,p) = \Phi_r\Big(\frac{n}{p_{r+1}}\,|\,p\Big) + \Delta_{r+1}(n\,|\,p)\,.$$

Für die S gelten aber ganz ähnliche Beziehungen, wie die Gleichungen (16) und (17) für die G. Beachtet man, daß die Gleichungen (12′), (16), (17) für beliebige Vielfache von P^r gelten und also $G_r(\mathsf{P}_{r+1} \pm n\,|\,p) = \pm G_r(n\,|\,p) + p_{r+1}\Phi_r(\mathsf{P}_r\,|\,g)$ ist, da $\mathsf{P}_{r+1} = p_{r+1}\cdot\mathsf{P}_r$ und $\Phi_r(\mathsf{P}_{r+1}\,|\,p) = p_{r+1}\cdot\Phi_r(\mathsf{P}_r\,|\,p)$ nach (12′), so folgt aus der Definitionsgleichung (18) mit (16) und (17):

$$(22) \qquad S_{r+1}(\mathsf{P}_{r+1} + n\,|\,p) - S_{r+1}(n\,|\,p) = \Phi_r(\mathsf{P}_r\,|\,p)\,,$$

$$(23) \qquad S_{r+1}(\mathsf{P}_{r+1} - n\,|\,p) + S_{r+1}(n\,|\,p) = \Phi_r(\mathsf{P}_r\,|\,p)$$

und aus (20) in Verbindung mit (14) und (15):

$$(24) \qquad \Delta_{r+1}(\mathsf{P}_{r+1} + n\,|\,p) = \Delta_{r+1}(n\,|\,p)$$

$$(25) \qquad \Delta_{r+1}(\mathsf{P}_{r+1} - n\,|\,p) + \Delta_{r+1}(n\,|\,p) = (-1)^r\,.$$

Im zweiten Falle, in dem n durch die neu hinzutretende Primzahl, sie heiße q, teilbar ist, müssen beide Lückenzahlen r-ter Stufe, als deren Summe n dargestellt ist, durch q teilbar sein oder keine von beiden. Die Anzahl der zu streichenden Zerlegungen der r-ten Stufe, um die Anzahl der Zerlegungen der $(r+1)$-ten Stufe zu erhalten, ist mithin gleich der Anzahl der Zerlegungen von $\frac{n}{q}$ in zwei Lückenzahlen r-ter Stufe. Um erkennen zu lassen, durch welche Primzahlen n nicht und durch welche es teilbar ist, sollen die ersteren mit p, die letzteren mit q hinfort bezeichnet werden. In der Bezeichnung der Zerlegungszahl G wollen wir dies durch doppelte Indizes andeuten, deren erster r die Anzahl der Primzahlen p, deren zweiter s die der Primzahlen q angibt. Die Summe $r+s$ gibt dann die Stufenzahl der Lückenzahlen für die Primzahlen p und q. Demnach ist hier:

$$(26) \qquad G_{r+1}(n\,|\,p_1, p_2, \ldots, p_r; q) = G_{r+1}(n\,|\,p, q) = G_r(n\,|\,p) - G_r\Big(\frac{n}{q}\,|\,p\Big)\,.$$

Mit Hilfe der Formeln (16) und (17) erhält man weiter, wenn jetzt $\mathsf{P}_{r+1} = q\cdot\mathsf{P}_r$ ist:

$$(16') \qquad G_{r+1}(\mathsf{P}_{r+1} + n\,|\,p; q) - G_{r+1}(n\,|\,p; q)$$

$$(17') \qquad = G_{r+1}(\mathsf{P}_{r+1} - n\,|\,p; q) + G_{r+1}(n\,|\,p; q)$$

$$= (q-1)\,\Phi_r(\mathsf{P}_r\,|\,p)\,.$$

Wir setzen in Übereinstimmung mit (1) $\mathsf{P}_{r+s} = p_1\cdot p_2\cdots p_r \times q_1\cdot q_2\cdots q_s$ und

$$(27) \qquad g_{r+s}(n) = g_{r,s}(n) = \Phi_{r,s}(\mathsf{P}_{r+s}\,|\,p; q)$$

$$= (p_1-2)(p_2-2)\cdots(p_r-2)\times(q_1-1)(q_2-1)\cdots(q_s-1)$$

und gebrauchen nach *Stäckels* Vorgange auch bei den hier verallgemeinerten Lückenzahlen für $g_{r,s}(n)$ die Benennung als *Gewicht* der Zahl n im Bereiche der durch die r Primzahlen p und s Primzahlen q bestimmten Lückenzahlen. $g_{r+s}(n)$ ist stets und nur dann gleich Null, wenn die Zahl 2 sich unter den $r+s$ Primzahlen befindet und n eine ungerade Zahl ist.

Mit der Gewichtsbezeichnung lassen sich nun die Gleichungen (16) und (16′), (17) und (17′) zusammenfassen und zugleich verallgemeinert schreiben:

$$(28) \qquad G_{r,s}(\sigma \mathsf{P}_{r+s} + n \,|\, p; q) = \sigma g_{r,s}(n) + G_{r,s}(n \,|\, p; q),$$

$$(29) \qquad G_{r,s}(\sigma \mathsf{P}_{r+s} - n \,|\, p; q) = \sigma g_{r,s}(n) - G_{r,s}(n \,|\, p; q),$$

$$(30) \qquad G_{r,s}(\sigma \mathsf{P}_{r+s} \,|\, p; q) = \sigma g_{r,s}(n),$$

wo $\mathsf{P}_{r+s} = p_1 p_2 \cdots p_r \times q_1 q_2 \cdots q_s$ ist.

Für die hier betrachteten verallgemeinerten Lückenzahlen gelten also dieselben Formeln, die ich früher für die *Stäckel*schen Lückenzahlen abgeleitet hatte.

Um die $G_{r,s}$ zu berechnen, genügt es daher, $n \leqq \left[\frac{\mathsf{P}_{r+s}}{2}\right]$ vorauszusetzen. Am zweckmäßigsten berechnet man

$$G_r(n \,|\, p), \quad G_r\left(\frac{n}{q_1} \,|\, p\right), \quad G_r\left(\frac{n}{q_2} \,|\, p\right), \ldots, G_r\left(\frac{n}{q_1 q_2} \,|\, p\right), \ldots, G_r\left(\frac{n}{q_1 q_2 \cdots q_s} \,|\, p\right)$$

und aus ihnen schließlich nach (26) die Zahl $G_{r,s}(n \,|\, p; q)$. Die Berechnung gestaltet sich natürlich für große Werte von r sehr mühsam, in erster Linie durch die Berechnung der zugehörigen Werte von

$$\mathsf{E}_r(n \,|\, p), \quad \mathsf{E}_r\left(\frac{n}{q_1} \,|\, p\right), \ldots, \mathsf{E}_r\left(\frac{n}{q_1 q_2 \cdots q_s} \,|\, p\right).$$

5.

Als einen genäherten Wert $G'_r(n \,|\, p)$ von $G_r(n \,|\, p)$ betrachten wir den Wert, den wir aus (11) durch Streichen von $\mathsf{E}_r(n \,|\, p)$ erhalten:

$$G'_r(n \,|\, p) = \Phi_r(n \,|\, p) - 1$$

und mit Hilfe von (26)

$$G'_{r,s}(n \,|\, p; q)$$
$$= \Phi_r(n \,|\, p) - \sum_{C_1} \Phi_r\left(\frac{n}{q_1} \,|\, p\right) + \sum_{C_2} \Phi_r\left(\frac{n}{q_1 q_2} \,|\, p\right) \mp \cdots + (-1)^s \Phi_r\left(\frac{n}{q_1 q_2 \cdots q_s} \,|\, p\right),$$

wo die Summen über die Kombinationen ohne Wiederholung der s Primzahlen q zur ersten, zweiten, ... Klasse zu bilden sind, oder kürzer geschrieben:

$$(31) \qquad G'_{r,s}(n \,|\, p; q)$$
$$= \left[n\left(1 - 2 \cdot \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - 2 \cdot \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{p_r}\right) \times \left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{q_s}\right)\right]$$
$$= \Phi_{r,s}(n \,|\, p; q);$$

hier ist in gleicher Weise, wie bei (10) angegeben, nach Ausmultiplikation der eckigen Klammer in jedem einzelnen Gliede

$$(-1)^{\varkappa+\lambda} 2^{\varkappa} \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_\varkappa \, q_1 q_2 \cdots q_\lambda} \quad (\varkappa = 0, 1, \ldots, r; \ \lambda = 0, 1, \ldots, s; \ p_0 = 1, q_0 = 1)$$

der Bruch durch die größte in ihm enthaltene ganze Zahl zu ersetzen. Der bei Benutzung dieses Näherungswertes begangene Fehler ist gleich

$$\mathsf{E}_r(n \,|\, p) - \sum_{C_1} \mathsf{E}_r\left(\frac{n}{q_1} \,|\, p\right) + \sum_{C_2} \mathsf{E}_r\left(\frac{n}{q_1 q_2} \,|\, p\right) \mp \cdots + (-1)^s \mathsf{E}_r\left(\frac{n}{q_1 q_2 \cdots q_s} \,|\, p\right);$$

über seine Abschätzung wird noch im 7. Abschnitte gesprochen.

Als einen zweiten Näherungswert $G''_{r,s}$ können wir den aus (31) folgenden Wert ansehen, der sich ergibt, wenn noch der Inhalt der eckigen Klammer als gewöhnliches Produkt behandelt wird. Dann ergibt sich

$$G''_{r,s}(n\,|\,p;\,q) = \frac{n}{\mathsf{P}_{r+s}}\, g_{r,s}\,(n). \tag{32}$$

Beachtet man, daß, wenn eine diophantische Restgleichung (8) den Wert $\varepsilon_{a,b} = 1$ liefert, die Ersetzung der ganzen Zahl $\left[\frac{n}{a\,b}\right]$ durch den Bruch $\frac{n}{a\,b}$ einen Fehler kleiner als 1 liefert, der sich in entgegengesetztem Sinne wie der durch das weggelassene $\varepsilon_{a,b} = 1$ gemachte Fehler bemerkbar macht; daß dagegen für $\varepsilon_{a,b} = 0$ nur die Ersetzung von $\left[\frac{n}{a\,b}\right]$ durch $\frac{n}{a\,b}$ einen echten Bruch als Fehler ergibt, so bleibt es zweifelhaft ob die Formel (31) oder die weniger strenge, für die Zahlenberechnung aber sehr viel bequemere (32) den dem wahren Werte $G_{r,s}(n\,|\,p;\,q)$ näherliegenden Wert liefert. Aus der nachfolgenden Zahlentafel scheint sich zu ergeben, daß die Formel (32) in den meisten Fällen den besseren Näherungswert ergibt.

Die beiden Näherungsformeln (31) und (32) sind als asymptotische Formeln anzusprechen. Da für $\Phi_{r,s}(n\,|\,p;\,q)$ die aus der Formel (12′) verallgemeinerte

$$\Phi_{r,s}\,(\sigma\mathsf{P}_{r+s} + n\,|\,p;\,q) = \Phi_{r,s}\,(n\,|\,p;\,q) + \sigma g_{r,s}\,(n)$$

gilt, so wächst mit Zunahme von σ auch der Wert von $G'_{r,s}\,(\sigma\mathsf{P}_{r+s} + n\,|\,p;\,q)$ sowohl, wie der von $G''_{r,s}(\sigma\,\mathsf{P}_{r+s} + n\,|\,p;\,q)$, während die begangenen Fehler stets dieselben bleiben, wie für n selbst, von dem wir wegen der Formel (29) sogar annehmen können, daß es $\leqq \left[\frac{\mathsf{P}_{r+s}}{2}\right]$ ist. Die hier gegebene Ableitung der beiden Formeln zeigt, daß sie in diesem Sinne auch für die Zahlen des Hauptbereiches gelten, was die früher gegebene Ableitung [1]) der Formel (32) nicht erkennen ließ.

6.

Nun sollen unter den $t = r + s$ Primzahlen p und q im besondern die ersten t Primzahlen

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17, \ldots$$

verstanden werden; unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung sind unter $p_1, p_2, \ldots, p_r$ alle Primzahlen dieser Reihe, die nicht Faktoren von n sind, zu verstehen, während $q_1, q_2, \ldots, q_s$ die übrigen der vorstehenden Primzahlen bezeichnen. Die Lückenzahlen 1. Stufe sind also jetzt alle ungeraden Zahlen, die 2. Stufe alle ungeraden, nicht durch 3 teilbaren Zahlen, die 3. Stufe alle ungeraden, nicht durch 3 und 5 teilbaren Zahlen, usw. Da nun alle Lückenzahlen t-ter Stufe, die kleiner sind als das Quadrat der $(t+1)$-ten Primzahl der obigen Reihe nur Primzahlen sein können, so folgt, daß die Anzahl der Zerlegungen einer geraden Zahl kleiner als das genannte Quadrat in die Summe zweier Lückenzahlen t-ter Stufe identisch ist mit der Anzahl ihrer Darstellungen als Summe zweier Primzahlen, deren keine eine der Primzahlen $2, 3, 5, \ldots, p_t$ ist. Nennt man eine solche Darstellung eine *Goldbach*sche Zerlegung einer geraden Zahl $2\,n$, so liefern, die Formeln

[1]) a. a. O., S. 119.

(4) bezw. (11) und (26) die genaue Anzahl aller *Goldbach*schen Zerlegungen, bei denen keine der beiden Primzahlen eine der vorstehend ausgeschlossenen ist, während die Formeln (31) und (32) Näherungswerte dieser Anzahl ergeben. Die Zahl der ausgeschlossenen Zerlegungen ist $\leqq 2(t-2)$ für $t>3$. Denn es ist $2n-2$ keine Primzahl und es können $2n-3$, $2n-5$ und $2n-7$ nicht gleichzeitig Primzahlen sein. Diese drei Zahlen seien entsprechend mit $G(2n)$, $G'(2n)$, $G''(2n)$ bezeichnet, und wir können (31) und (32) schreiben:

$$(33) \qquad G'(2n) = \left[2n\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\delta_2\cdot\frac{1}{3}\right)\left(1-\delta_3\cdot\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\delta_t\cdot\frac{1}{p_t}\right)\right],$$

wo $\delta_\varrho = 1$ oder 2 ist, je nachdem die dabeistehende Primzahl p_ϱ ein Teiler von $2n$ ist oder nicht;

$$(34) \qquad G''(2n) = \frac{2n}{\mathsf{P}_t}\, g_t(2n),$$

wo $\mathsf{P}_t = 2\cdot 3\cdot 5\cdots p_t$ und $g_t(2n) = (3-\delta_2)(5-\delta_3)\cdots(p_t-\delta_t)$ das Gewicht der Zahl $2n$ ist.

Die Tafel I gibt die Werte von G, G', G'' für die geraden Zahlen $2n$ von 2 bis 500, in welcher zur Berechnung [1]) von G nach den angegebenen Formeln Lückenzahlen

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. Stufe zu benutzen sind, je nachdem $2n$ liegt zwischen

0...9, 9...25, 25...49, 49...121, 121...169, 169...289, 289...361, 361...529.

Die Werte für G' und G'' zeigen, mit den Werten von G verglichen, daß in der weitaus größeren Zahl von Fällen die Formel (34) die besseren Näherungswerte gibt als die für die numerische Rechnung weit unbequemere Formel (33), worauf schon früher hingewiesen worden ist.

Herr *V. Brun* hat zur Berechnung von Näherungswerten der Anzahl *Goldbach*scher Zerlegungen einer geraden Zahl vermutungsweise die Gleichung aufgestellt: [2])

$$(35) \qquad G_{Br}(2n) = k\,\frac{2n}{\log\text{nat}^2\, 2n}\,\frac{p-1}{p-2}\cdot\frac{q-1}{q-2}\cdots\frac{r-1}{r-2},$$

wo $p, q, \ldots, r$ die in $2n$ enthaltenen Primfaktoren $< \sqrt{2n}$ bezeichnen und die Konstante k nach *Stäckel* [2]) den Wert $1.320\cdots$ hat. Für $2n = 400$ bis $2n = 460$

[1]) Für die drei Tafeln I bis III sind die genauen Werte G meinen *Tafeln für das Goldbachsche Gesetz* (Nova Acta der Kaiserlichen Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher, **72**, Nr. 1, Halle 1897) entnommen.

[2]) *V. Brun, Über das Goldbachsche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare.* Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, **34** (1915), Nr. 8. In dieser Arbeit benutzt Herr *Brun* für die Konstante k den von ihm zuerst gefundenen Wert $k = 1.5985\ldots$, weshalb die von ihm angegebenen Werte „Nach XII“ (S. 18 u. 19) zu groß sind. Aus seinen Werten sind durch Multiplikation mit $\frac{1.320..}{1.5985.}$ die in den drei Tafeln stehenden Werte G_{Br} berechnet. Die von Herrn *Brun* angegebenen wahren Werte von $G(2n)$, die meinen Tafeln für das Goldbachsche Gesetz entnommen sind, stimmen mit den in den drei Tafeln I, II, III dieser Arbeit gegebenen deshalb nicht überein, weil Herr *Brun* die Anzahl der Zerlegungen nicht in Abzug gebracht hat, in denen eine der Primzahlen 3, 5, ..., 19, bzw. 3, 5, ..., 61 ist, wie es hier geschehen muß.

(37)

sind auch noch die Werte $G_{Br}(2n)$ nach dieser Formel [1]) berechnet. Die Tafel II gibt die Werte von G, G'', G_{Br} für $2n = 4000$ bis 4010 und die Tafel III für elf Zahlen $2n$, die gleich dem Doppelten einer Primzahl sind. Für diese letzteren Zahlen haben die δ in der Formel (33) sämtlich den Wert 2 und die ungeraden Primzahlen laufen von 3 bis 61, während die Formel (35) sich reduziert auf

$$G_{Br}(2n) = k \cdot \frac{2n}{\log \mathrm{nat}^2\, 2n}. \tag{36}$$

Ein Vergleich der Werte von G'' und G_{Br} in der Tafel I läßt eine Überlegenheit der Näherungsformeln (35) bezw. (36) über (34) kaum erkennen; eher scheint eine solche der Formel (34) über die beiden andern hervorzugehen. Vielleicht läßt sich durch eine Multiplikation der rechten Seite von (34) mit einer passend gewählten Konstanten diese Formel den beiden Formeln (35) und (36) noch überlegen gestalten.

7.

Es fragt sich nun, ob sich Grenzen angeben lassen, zwischen denen der bei Anwendung der Näherungsformel (31) gegenüber der strengen Formel begangene Fehler liegt. Wir wollen wieder den Fall betrachten, daß die Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sämtlich nicht Teiler von n sind. Dann liefert die ungünstigsten Werte für $\mathsf{E}_r(n \mid p)$ in (11) die Annahme, daß alle Restgleichungen (8), die zu positiven Gliedern von (4) bezw. (11) gehören, $\varepsilon_{a,b} = 1$, alle zu negativen Gliedern gehörenden Restgleichungen $\varepsilon_{a,b} = 0$ liefern, oder daß das umgekehrte der Fall ist.

Man erkennt leicht, daß zu jedem Gliede $(-1)^\varkappa 2^\varkappa \sum_{c_\varkappa} \left[\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_\varkappa}\right]$ im ganzen $2^\varkappa \binom{r}{\varkappa}$ diophantische Gleichungen der Gestalt (6) gehören, von denen aber alle Gleichungen der Form

$$\varrho + \sigma \cdot p_1 p_2 \cdots p_\varkappa = n$$

nach (7) für ε den Wert 0 liefern. Solcher Gleichungen gibt es aber $2\binom{r}{\varkappa}$, folglich kann höchstens $(2^\varkappa - 2)\binom{r}{\varkappa}$-mal $\varepsilon = 1$ sein. Daher ergeben sich als denkbar größter und kleinster Wert

$$\left.\begin{aligned} &(2^2-2)\tbinom{r}{2} + (2^4-2)\tbinom{r}{4} + (2^6-2)\tbinom{r}{6} + \cdots = \frac{3^r + (-1)^r - 2^{r+1} + 2}{2} = h_r^{\mathrm{I}} \\ &\text{und} \\ &(2^3-2)\tbinom{r}{3} + (2^5-2)\tbinom{r}{5} + (2^7-2)\tbinom{r}{7} + \cdots = \frac{3^r - (-1)^r - 2^{r+1}}{2} = h_r^{\mathrm{II}}, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

so daß, da

$$G_r'(n; p_1, p_2, \ldots, p_r) = \Phi(n; p_1, p_2, \ldots, p_r) - 1$$

ist,

$$G_r'(n) + h_r^{\mathrm{I}} \geqq G_r(n) \geqq G_r'(n) - h_r^{\mathrm{II}}, \qquad h_r^{\mathrm{I}} \geqq \mathsf{E}_r(n \mid p) \geqq -h_r^{\mathrm{II}}$$

[1]) Sitzungsber. der Heidelberger Akad. d. Wiss.

sein muß. Mit wachsendem r aber wachsen diese Zahlen sehr schnell:

r	h_r^{I}	h_r^{II}
1	0	0
2	2	0
3	6	6
4	26	24
5	90	90
6	302	300
7	966	966
8	3026	3024
9	9330	9330
10	28502	28500
. . . . .		

und übersteigen sehr die Werte von $G_r(n)$. Dies hat seinen Grund in der ungünstigen Annahme, die über die Verteilung der $\varepsilon_{a,b}$ möglicherweise nicht vermieden werden kann, so lange nicht eine weitere Voraussetzung gemacht ist.

Eine solche Voraussetzung, die eine starke Einschränkung der Fehlergrenzen herbeiführt, ist:

Für *alle* Produkte von je $\varkappa$ der t Primzahlen p ist $\left[\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_\varkappa}\right] = 0$.

Dann gilt der *Satz*:

„Die notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung, daß die Restgleichung

$$(\alpha) \qquad \varrho a + \sigma b p_{\varkappa+1} = n - \left[\frac{n}{ab p_{\varkappa+1}}\right] ab p_{\varkappa+1} = n$$

wo $a \cdot b = p_1 p_2 \cdots p_\varkappa$, $a > 1, b > 1$ ist, eine positive Lösung hat, ist das Vorhandensein einer positiven Lösung der Restgleichung

$$(\beta) \qquad \varrho a + \sigma b = n - \left[\frac{n}{ab}\right] ab = n.“$$

Beweis: Für eine positive Lösung ϱ_0, σ_0 der Restgleichung (α) muß $\varrho_0 < b p_{\varkappa+1}$, $\sigma_0 < a$ sein, da nach Voraussetzung $n < ab$, also um so mehr $< ab p_{\varkappa+1}$ ist. Dann ist $\bar{\varrho} = \varrho_0, \bar{\sigma} = \sigma_0 p_{\varkappa+1}$ eine positive Lösung der Gleichung (β), und es kann auch keine weitere existieren, da $\left[\frac{n}{ab}\right] = 0$ vorausgesetzt ist; es muß also sogar $\bar{\varrho} = \varrho_0 < b$ und $\bar{\sigma}$ durch $p_{\varkappa+1}$ teilbar und $< a$ sein.

Umgekehrt kann eine positive Lösung $\bar{\varrho}, \bar{\sigma}$ der Gleichung (β) nur dann eine solche der Gleichung (α) sein, wenn $\bar{\sigma}$ durch $p_{\varkappa+1}$ teilbar ist.

Folglich sind nur die drei Fälle für $\left[\frac{n}{ab}\right] = 0$ möglich:

Für die Gleichung (β) ist $\varepsilon_{a,b} = 0$, für die Gleichung (α) $\varepsilon_{a,bp_{\varkappa+1}} = 0$;
„ „ „ „ „ $\varepsilon_{a,b} = 1$, „ „ „ „ $\varepsilon_{a,bp_{\varkappa+1}} = 0$;
„ „ „ „ „ $\varepsilon_{a,b} = 1$, „ „ „ „ $\varepsilon_{a,bp_{\varkappa+1}} = 1$.

Wenn jedoch $\left[\frac{n}{ab}\right] > 0$ ist, so geht, wenn a, b, c drei zueinander und zu n teilerfremde Zahlen bezeichnen, aus der Gleichung

$$(\beta') \qquad \varrho a + \sigma b = n - \left[\frac{n}{ab}\right] ab$$

die Gleichung

$$\varrho a + \left(\sigma + \left[\frac{n}{ab}\right] a\right) b - \left[\frac{n}{abc}\right] abc = n - \left[\frac{n}{abc}\right] abc$$

hervor. Ist nun

$$\left[\frac{n}{ab}\right] ab = \left[\frac{n}{abc}\right] abc,$$

so hat die Gleichung

$$(\alpha') \qquad \varrho a + \sigma bc = n - \left[\frac{n}{abc}\right] abc,$$

falls (β') die positive Lösung $\varrho = \bar{\varrho}$, $\sigma = \bar{\sigma}$ besitzt, nur dann eine Lösung, wenn $\bar{\sigma}$ durch c teilbar ist, und es ist in diesem Falle

$$\varrho_0 = \bar{\varrho}, \quad \sigma_0 = \frac{\bar{\sigma}}{c}$$

die positive Lösung von (α').

Ist aber

$$\left[\frac{n}{ab}\right] ab > \left[\frac{n}{abc}\right] abc,$$

so muß, damit (α') zugleich mit (β') eine positive Lösung besitzt, sich eine positive ganze Zahl $\varkappa < c$ so bestimmen lassen, daß

$$0 < \bar{\varrho} + \varkappa b < bc, \quad \bar{\sigma} + \left(\left[\frac{n}{ab}\right] - \varkappa\right) a \text{ durch } c \text{ teilbar und}$$

$$0 < \bar{\sigma} + \left(\left[\frac{n}{ab}\right] - \varkappa\right) a - \left[\frac{n}{abc}\right] ac < a$$

ist. Die Lösung von (α') ist dann

$$\varrho_0 = \bar{\varrho} + \varkappa b, \quad \sigma_0 = \frac{\bar{\sigma} + \left(\left[\frac{n}{ab}\right] - \varkappa\right) a}{c} - \left[\frac{n}{abc}\right] a.$$

Diese letzteren Bemerkungen vermögen die Ermittelung aller Restgleichungen (8), die eine positive Lösung besitzen, erheblich zu vereinfachen.

Wir nehmen nun an, daß alle Produkte von je $\varkappa$ der t Primzahlen p und q größer als n sind. Dann führen wir zunächst die Berechnung von $G_t(n\,|\,p; q) = G_{r,s}(n\,|\,p; q)$ mit Hilfe der Formel (26) auf die Berechnung der Zahlen $G_r(n\,|\,p)$, $G_r\left(\frac{n}{q_1}\,|\,p\right), \ldots, G_r\left(\frac{n}{q_1 q_2}\,|\,p\right), \ldots$ zurück. Um $G_r(n\,|\,p)$ zu berechnen, ist die ungünstigste Annahme, daß jede der sämtlichen Restgleichungen, die zu dem Gliede $(-1)^\varkappa 2^\varkappa \sum_{C_\varkappa} \left[\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_\varkappa}\right]$ gehören, eine positive Lösung be-

sitzt, für sie also $\varepsilon = 1$ ist. Die Anzahl dieser Einheiten ε ist dann

$$u_\varkappa = (2^\varkappa - 2)\binom{r}{\varkappa}.$$

Wenn von den Restgleichungen des nächstfolgenden Gliedes

$$(-1)^{\varkappa+1} 2^{\varkappa+1} \sum_{c_{\varkappa+1}} \left[\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_{\varkappa+1}}\right]$$

überhaupt welche eine positive Lösung besitzen, so kann dies nicht für alle gelten; denn die Restgleichungen $\varrho a + \sigma b = n$, in denen a ein Produkt von $\varkappa$ Primzahlen p, b aber nur eine einzige solche Primzahl ist oder umgekehrt a nur aus einer Primzahl, b aber aus einem Produkte von $\varkappa$ Primzahlen besteht, können keine positive Lösung haben, da bereits a bezw. b allein größer als n ist. Solcher Restgleichungen gibt es $2\binom{r}{1}\binom{r-1}{\varkappa}$. Setzen wir allgemein

$$u_\varrho = (2^\varrho - 2)\binom{r}{\varrho}, \tag{38}$$

so können folglich zu dem betrachteten Gliede höchstens

$$v_1 = u_{\varkappa+1} - 2\binom{r}{1}\binom{r-1}{\varkappa}$$

Restgleichungen gehören, die positive Lösungen haben. Gehen wir jetzt zu dem nächsten Gliede $(-1)^{\varkappa+2} 2^{\varkappa+2} \sum_{c_{\varkappa+2}} \left[\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_{\varkappa+2}}\right]$ über, so gehören zu ihm $u_{\varkappa+2}$ Restgleichungen $\varrho a + \sigma b = n$; von ihnen aber haben auf Grund der Voraussetzung alle, für die a aus einer bezw. zwei Primzahlen p, b aus einem Produkte von $\varkappa + 1$ bezw. $\varkappa$ Primzahlen besteht, oder umgekehrt, wenn das erstere für b, das letztere für a gilt, keine positive Lösung. Daher können von dem betrachteten Gliede höchstens

$$v_2 = u_{\varkappa+2} - 2\sum_{\varrho=1}^{2}\binom{r}{\varrho}\binom{r-\varrho}{\varkappa+2-\varrho}$$

Restgleichungen positive Lösungen haben; und so fort. Das letzte Glied, das überhaupt noch zu Restgleichungen mit einer positiven Lösung führen kann, ist $(-1)^{2\varkappa-2} 2^{2\varkappa-2} \sum_{c_{2\varkappa-2}} \left[\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_{2\varkappa-2}}\right]$. Diese Restgleichungen können nur so beschaffen sein, daß a und b Produkte von je $\varkappa - 1$ Primfaktoren sind. Alle weiteren Glieder führen zu Restgleichungen, bei denen mindestens entweder a oder b ein Produkt von $\varkappa$ oder mehr Primzahlen ist, und die daher keine positive Lösung haben können. Allgemein kann das Glied $(-1)^{\varkappa+\sigma} 2^{\varkappa+\sigma} \sum_{c_{\varkappa+\sigma}} \left[\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_{\varkappa+\sigma}}\right]$ höchstens

$$v_\sigma = u_{\varkappa+\sigma} - 2\sum_{\varrho=1}^{\sigma}\binom{r}{\varrho}\binom{r-\varrho}{\varkappa+\sigma-\varrho} \tag{39}$$

Restgleichungen liefern.

Um zur Abschätzung von $\mathsf{E}_r(n|p)$ wieder die ungünstigsten Bedingungen

zu erhalten, müssen wir annehmen, daß entweder alle zu den Gliedern

$$2^2 \sum_{C_2} \left[\frac{n}{p_1 p_2}\right], \qquad 2^4 \sum_{C_4} \left[\frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4}\right], \dots$$

gehörenden Restgleichungen positive Lösungen und alle zu den Gliedern

$$2^3 \sum_{C_3} \left[\frac{n}{p_1 p_2 p_3}\right], \qquad 2^5 \sum_{C_5} \left[\frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5}\right], \dots$$

gehörenden Restgleichungen keine Lösungen besitzen oder umgekehrt. Die Reihen enden mit den Gliedern $2^{\varkappa} \sum_{C_\varkappa} \left[\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_\varkappa}\right]$ und $2^{\varkappa-1} \sum_{C_{\varkappa-1}} \left[\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_{\varkappa-1}}\right]$ oder umgekehrt, je nachdem $\varkappa$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Dann ist die Anzahl der in Betracht kommenden Restgleichungen und damit die Summe der sich ergebenden Einheiten für die obere Reihe $u_2 + u_4 + u_6 + \cdots$, für die untere Reihe $u_3 + u_5 + u_7 + \cdots$, wo das letzte Glied jeder Reihe durch $u_\varkappa$ bestimmt ist. Nach dem oben bewiesenen Satze muß aber, wenn das Glied $(-1)^{\varkappa+1} 2^{\varkappa+1} \sum_{C_{\varkappa+1}} \left[\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_{\varkappa+1}}\right]$ zu v_1 Restgleichungen mit positiven Lösungen führt, das vorhergehende Glied $u_\varkappa$ solcher Restgleichungen liefern. Führt das Glied $(-1)^{\varkappa+3} 2^{\varkappa+3} \sum_{C_{\varkappa+3}} \left[\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_{\varkappa+3}}\right]$ zu v_3 Restgleichungen mit positiven Lösungen, so gehören zu dem vorangehenden Gliede v_2 Restgleichungen mit positiven Lösungen. In dem angenommenen Falle, daß die v ihre höchsten Werte (39) erreichen, lassen sich Grenzen für $\mathsf{E}_r(n \mid p)$ leicht ermitteln:

Ist $\varkappa$ gerade, so bilde man:

(I)	(II)
$u_2 + u_4 + \cdots + u_\varkappa,$	$u_3 + u_5 + \cdots + u_{\varkappa-1},$
$u_2 + u_4 + \cdots + u_\varkappa - v_1 + v_2,$	$u_3 + u_5 + \cdots + u_{\varkappa-1} - u_\varkappa + v_1,$
$u_2 + u_4 + \cdots + u_\varkappa - v_1 + v_2 - v_3 + v_4,$	$u_3 + u_5 + \cdots + u_{\varkappa-1} - u_\varkappa + v_1 - v_2 + v_3.$
$\vdots$	$\vdots$

Die größten Zahlen in beiden Spalten, h_r^{I} in der linken, h_r^{II} in der rechten Spalte, geben an, um wieviel $G_r'(n)$ höchstens zu klein und um wieviel es höchstens zu groß gegen den wahren Wert $G_r(n)$ sein kann, so daß

$$G_r'(n) + h_r^{\mathrm{I}} \geqq G_r(n) \geqq G_r'(n) - h_r^{\mathrm{II}}, \qquad h_r^{\mathrm{I}} \geqq \mathsf{E}_r(n \mid p) \geqq - h_r^{\mathrm{II}}$$

ist.

Ist $\varkappa$ ungerade, so ist in gleicher Weise mit den beiden Spalten

(I′)	(II′)
$u_2 + u_4 + \cdots + u_{\varkappa-1}$	$u_3 + u_5 + \cdots + u_\varkappa,$
$u_2 + u_4 + \cdots + u_{\varkappa-1} - u_\varkappa + v_1$	$u_3 + u_5 + \cdots + u_\varkappa - v_1 + v_2$
$u_2 + u_4 + \cdots + u_{\varkappa-1} - u_\varkappa + v_1 - v_2 + v_3$	$u_3 + u_5 + \cdots + u_\varkappa - v_1 + v_2 - v_3 + v_4$
$\vdots$	$\vdots$

zu verfahren; die linke Spalte liefert h_r^{I}, die rechte h_r^{II}.

Auch bei diesem Verfahren Fehlergrenzen für $G_t'(n)$ zu erhalten, ergeben sich für größere Zahlen t noch bald große Werte, die aber sehr erheblich hinter den bei dem ersten Verfahren gefundenen Werten zurückbleiben. Wir wollen auch dies an einem Zahlenbeispiele zeigen, das zugleich das Verfahren noch leichter erkennen läßt.

Beispiel: Es sei $t = 10$, $\varkappa = 4$; die Primzahlen für die Bildung der Lückenzahlen seien

$$3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31.$$

Dann ist die Voraussetzung $\left[\frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4}\right] = 0$ erfüllt für alle Zahlen $n < 1155$. Wir führen die Berechnung durch für die Annahmen, daß $r = t = 10$, $s = 0$; $r = 9$, $s = 1$; $r = 8$, $s = 2$; $r = 7$, $s = 3$. Der Fall $s = 4$ ist unmöglich, da n kleiner als das Produkt von irgend vier der zehn Primzahlen vorausgesetzt ist.

$\varkappa = 4$.

$r = 10$: $u_2 = 90$, $u_4 = 2940$, $u_6 = 13020$;
$u_3 = 720$, $u_5 = 7560$;
$v_1 = 5040$, $v_2 = 4200$.

Da $\varkappa$ gerade ist, so sind die oberen Spalten I und II zu benutzen und ergeben die Zahlenwerte:

(I) 3030, 2190; (II) 720, 2820.

Folglich ist

$h_{10}^{\mathrm{I}} = 3030$, $h_{10}^{\mathrm{II}} = 2820$.

$r = 9$: $u_2 = 72$, $u_4 = 1764$, $u_6 = 5208$;
$u_3 = 504$, $u_5 = 3780$;
$v_1 = 2520$, $v_2 = 1680$.

(I) 1836, 996; (II) 504, 1260.

$h_9^{\mathrm{I}} = 1836$, $h_9^{\mathrm{II}} = 1260$.

$r = 8$: $u_2 = 56$, $u_4 = 980$, $u_6 = 1736$;
$u_3 = 336$, $u_5 = 1680$;
$v_1 = 1120$, $v_2 = 560$.

(I) 1036, 476; (II) 336, 476.

$h_8^{\mathrm{I}} = 1036$, $h_8^{\mathrm{II}} = 476$.

$r = 7$: $u_2 = 42$, $u_4 = 490$, $u_6 = 434$;
$u_3 = 210$, $u_5 = 630$;
$v_1 = 420$, $v_2 = 140$.

(I) 532, 252; (II) 210, 140.

$h_7^{\mathrm{I}} = 532$, $h_7^{\mathrm{II}} = 210$.

Im ersten Falle $r = 10$ ist n durch keine der zehn Primzahlen teilbar, und es ergeben daher h_{10}^{I} und h_{10}^{II} die Fehlergrenzen:

$$G_{10}'(n\,|\,p) + 3030 \geqq G_{10}(n\,|\,p) \geqq G_{10}'(n\,|\,p) - 2820.$$

Im zweiten Falle, in dem n durch eine der Primzahlen — sie sei q — teilbar ist, haben wir nach (26)

$$G_{9,1}(n\,|\,p;\,q) = G_9(n\,|\,p) - G_9\left(\frac{n}{q}\,|\,p\right).$$

$G_9(n\,|\,p)$ ist oben abgeschätzt. Zur Ermittlung von $G_9\left(\frac{n}{q}\,|\,p\right)$ aber ist zu beachten, daß, da n kleiner als das Produkt von irgend vier der zehn Primzahlen p und q vorausgesetzt ist, $\frac{n}{q}$ kleiner ist als das Produkt von je drei der Primzahlen $p_1, \ldots, p_9$. Deshalb sind für $G_9\left(\frac{n}{q}\,|\,p\right)$ jetzt $\bar{h}_9^{\mathrm{I}}$ und $\bar{h}_9^{\mathrm{II}}$ auf Grund von $\varkappa = 3$ zu berechnen:

$\varkappa = 3,\ r = 9$: $u_2 = 72$, $u_4 = 1764$; $u_3 = 504$;
$v_1 = 756$.

Da jetzt $\varkappa$ ungerade ist, so sind die Spalten I′ und II′ zu gebrauchen:

(I′) 72, 324; (II)′ 504;
$\bar{h}_9^{\mathrm{I}} = 324$, $\bar{h}_9^{\mathrm{II}} = 504$.

Die Fehlergrenzen von $G'_{9,1}$ ergeben sich daher als die Summen

$$h_9^{\mathrm{I}} + \bar{h}_9^{\mathrm{II}} = 2340 \quad \text{und} \quad h_9^{\mathrm{II}} + \bar{h}_9^{\mathrm{I}} = 1584,$$

so daß

$$G'_{9,1} + 2340 \geqq G_{9,1} \geqq G'_{9,1} - 1584$$

ist.

Im dritten Falle ist n durch zwei Primzahlen q_1 und q_2 teilbar. Es ist

$$G_{8,2}(n\,|\,p;\,q) = G_8(n\,|\,p) - G_8\left(\frac{n}{q_1}\,|\,p\right) - G_8\left(\frac{n}{q_2}\,|\,p\right) + G_8\left(\frac{n}{q_1 q_2}\,|\,p\right),$$

und da $\frac{n}{q_1}$, $\frac{n}{q_2}$ kleiner als das Produkt von je drei der übrigen acht Primzahlen sind, $\frac{n}{q_1 q_2}$ kleiner als das Produkt von je zweien derselben ist, so sind noch die h^{I} und h^{II} für $r = 8$, $\varkappa = 3$ und $r = 8$, $\varkappa = 2$ zu berechnen.

$r = 8,\ \varkappa = 3$: $u_2 = 56$, $u_4 = 980$; $u_3 = 336$;
$v_1 = 420$.

(I′) 56, 140; (II′) 336;
$\bar{h}_8^{\mathrm{I}} = 140$, $\bar{h}_8^{\mathrm{II}} = 336$.

$\varkappa = 2,\ r = 8$: $u_2 = 56$;
$\bar{h}_8^{\mathrm{I}} = 56$; $\bar{h}_8^{\mathrm{II}} = 0$.

Die Fehlergrenzen sind mithin:

$$h_8^{\mathrm{I}} + 2\bar{h}_8^{\mathrm{II}} + \bar{\bar{h}}_8^{\mathrm{I}} = 1764, \quad h_8^{\mathrm{II}} + 2\bar{h}_8^{\mathrm{I}} + \bar{\bar{h}}_8^{\mathrm{II}} = 756$$

und

$$G'_{8,2} + 1764 \geqq G_{8,2} \geqq G'_8 - 756.$$

Im letzten Falle endlich, in dem n durch die drei Primzahlen q_1, q_2, q_3 teilbar, haben wir

$$G_{7,3}(n\,|\,p;q) = G_7(n\,|\,p) - G_7\Big(\frac{n}{q_1}\,|\,p\Big) - G_7\Big(\frac{n}{q_2}\,|\,p\Big) - G_7\Big(\frac{n}{q_3}\,|\,p\Big)$$
$$+ G_7\Big(\frac{n}{q_1 q_2}\,|\,p\Big) + G_7\Big(\frac{n}{q_2 q_3}\,|\,p\Big) + G_7\Big(\frac{n}{q_3 q_1}\,|\,p\Big) - G_7\Big(\frac{n}{q_1 q_2 q_3}\,|\,p\Big).$$

Es sind also noch die h zu berechnen für $r=7,\ \varkappa=3$; $r=7,\ \varkappa=2$; $r=7,\ \varkappa=1$.

$r=7,\ \varkappa=3$: $u_2 = 42$, $u_4 = 490$; $u_3 = 210$;
$v_1 = 210$.
(I′) $\bar{h}_7^{\mathrm{I}} = 42$, (II′) $\bar{h}_7^{\mathrm{II}} = 210$.

$r=7,\ \varkappa=2$: $u_2 = 42$;
$\bar{h}_7^{\mathrm{I}} = 42$, $\bar{h}_7^{\mathrm{II}} = 0$.

$r=7,\ \varkappa=1$:
$\bar{\bar{h}}_7 = 0$, $\bar{\bar{h}}_7 = 0$.

Die Fehlergrenzen sind

$$h_7^{\mathrm{I}} + 3\bar{h}_7^{\mathrm{II}} + 3\bar{h}_7^{\mathrm{I}} + \bar{\bar{h}}_7^{\mathrm{II}} = 1288, \quad h_7^{\mathrm{II}} + 3\bar{h}_7^{\mathrm{I}} + 3\bar{h}_7^{\mathrm{II}} + \bar{\bar{h}}_7^{\mathrm{I}} = +336$$

und

$$G'_{7,3} + 1288 \geqq G_{7,3} \geqq G'_{7,3} + 336.$$

Wenn auch die so erhaltenen Grenzen sehr viel engere sind, als die früher durch die Formeln (37) berechneten:

Für	$r=10$,	$s=0$:	28502	28500
„	$r=9$,	$s=1$:	18660	18660
„	$r=8$,	$s=2$:	12104	12096
„	$r=7$,	$s=3$:	7728	7728

so sind sie nur für die spezielle, nicht stets erfüllte Annahme über die Werte der v auf S. 189 abgeleitet und doch noch viel zu weit, als daß aus ihnen sich weitere Schlüsse ziehen oder gar ein Beweis des *Goldbach*schen Satzes erbringen ließe.

Der Grund dafür liegt in den ungünstigen Annahmen, die noch über die zu den Gliedern $2^{\varrho}\sum_{c_\varrho}\Big[\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_\varrho}\Big]$ für $\varrho = 2, 3, \ldots, \varkappa$ gehörigen Restgleichungen gemacht werden mußten. Vielleicht ist es möglich, noch Ergebnisse über gewisse Systeme solcher Restgleichungen zu finden, so daß günstigere Annahmen zulässig sind, als die hier gemachten. Solche Systeme, wie sie sich im Vorstehenden zu betrachten als nötig erweisen, scheinen bis jetzt noch keine Untersuchung gefunden zu haben. Zu ihr anzuregen, ist der vornehmliche Zweck dieses letzten Abschnittes.

Tafel I.

$2n$	G	G'	G''	$2n$	G	G'	G''	$2n$	G	G'	G''	$2n$	G	G'	G''	G_{Br}	$2n$	G	G'	G''	G_{Br}
2	1	1	1	2	16	14	15	2	11	19	10	2	17	21	13		2	30	48	31	33
4	2	2	2	4	8	8	7	4	20	28	20	4	18	20	13		4	18	24	16	17
6	3	3	3	6	7	7	8	6	9	17	10	6	28	34	28		6	22	32	19	17
8	4	4	4	8	14	16	15	8	12	14	11	8	18	20	18		8	34	44	34	36
10	1	1	2	110	10	12	10	210	34	36	33	310	20	24	18		410	26	32	21	22
12	4	4	4	2	10	10	10	2	12	16	10	2	34	38	30		2	18	24	16	17
14	3	3	2	4	18	18	16	4	13	15	11	4	15	21	14		4	36	44	32	33
16	2	2	3	6	8	8	8	6	24	26	21	6	16	20	14		6	16	20	18	18
18	6	6	6	8	9	7	8	8	11	13	11	8	26	40	28		8	20	18	19	19
20	4	4	3	120	22	22	23	220	18	18	16	320	16	26	19		420	58	64	52	53
22	3	5	4	2	7	11	7	2	20	24	22	2	18	22	17		2	19	23	16	17
24	8	8	8	4	8	10	7	4	14	12	13	4	32	38	28		4	20	22	17	17
26	3	3	3	6	20	18	18	6	11	13	11	6	11	19	14		6	36	48	33	35
28	2	2	3	8	8	10	7	8	24	26	23	8	16	18	14		8	14	22	17	17
30	8	8	8	130	12	12	10	230	16	20	15	330	44	46	43		430	26	28	22	23
32	4	4	3	2	18	18	17	2	10	14	11	2	14	18	14		2	36	48	34	35
34	3	3	3	4	7	9	8	4	26	28	25	4	17	17	15		4	24	32	20	22
36	6	6	7	6	8	10	8	6	12	14	12	6	36	42	35		6	16	24	17	18
38	5	3	4	8	14	18	16	8	14	14	14	8	18	16	16		8	34	48	34	36
40	4	4	5	140	14	16	13	240	32	36	32	340	24	20	21		440	26	30	25	26
42	8	8	8	2	9	11	8	2	14	14	13	2	30	38	30		2	22	22	20	21
44	6	4	4	4	18	18	17	4	12	14	12	4	16	14	15		4	38	50	35	36
46	3	5	5	6	10	9	9	6	26	30	24	6	17	15	15		6	17	25	17	18
48	10	8	10	8	8	10	9	8	10	14	12	8	30	38	30		8	22	32	21	22
50	4	6	5	150	24	24	23	250	16	18	16	350	24	28	24		450	48	60	47	49
52	4	6	4	2	8	12	9	2	30	32	30	2	16	18	17		2	18	24	18	18
54	10	10	8	4	12	12	12	4	13	13	13	4	36	40	31		4	19	23	18	18
56	4	6	5	6	18	18	18	6	14	14	13	6	14	18	16		6	42	46	37	39
58	5	5	4	8	9	11	9	8	28	30	26	8	15	17	16		8	17	23	18	18
60	12	12	11	160	12	14	12	260	18	18	19	360	40	48	42		460	26	32	24	25
62	5	7	4	2	16	18	19	2	13	13	13	2	11	27	14		2	52	70	48	
64	6	8	5	4	10	10	10	4	30	32	29	4	22	28	19		4	22	26	18	
66	8	10	9	6	9	9	10	6	14	14	16	6	28	46	29		6	19	27	18	
68	4	8	5	8	24	24	24	8	14	12	13	8	14	28	14		8	42	52	40	
70	8	8	8	170	12	20	11	270	36	38	36	370	22	34	19		470	24	34	24	
72	12	12	10	2	10	16	9	2	14	14	13	2	30	46	29		2	22	26	18	
74	7	9	5	4	20	24	17	4	15	13	14	4	20	22	17		4	38	50	37	
76	6	10	5	6	10	16	10	6	26	32	27	6	18	28	15		6	24	28	24	
78	10	12	11	8	9	17	9	8	13	15	14	8	38	50	35		8	17	25	19	
80	8	10	8	180	26	30	24	280	24	22	22	380	24	30	21		480	54	62	50	
82	7	9	6	2	12	16	12	2	28	34	28	2	17	27	15		2	17	25	19	
84	16	16	14	4	10	18	9	4	12	16	14	4	34	48	30		4	24	30	21	
86	5	9	6	6	20	26	18	6	10	20	17	6	15	27	15		6	42	50	38	
88	6	8	6	8	8	16	9	8	28	34	28	8	16	26	15		8	20	26	19	
90	18	18	17	190	14	20	13	290	16	26	17	390	50	56	44		490	34	40	31	
92	6	8	7	2	20	26	19	2	14	22	13	2	16	32	18		2	42	52	38	
94	7	7	7	4	11	19	10	4	34	42	31	4	17	25	15		4	22	26	22	
96	12	12	14	6	14	16	12	6	12	22	13	6	36	46	34		6	22	24	19	
98	8	8	8	8	24	28	22	8	17	33	13	8	13	25	16		8	40	50	39	
100	10	8	10	200	14	24	13	300	38	44	35	400	22	32	21	22	500	26	32	26	

Tafel II.

$2n$	G	G''	G_{Br}
4000	126	123	113
2	210	199	185
4	140	147	125
6	95	92	86
8	200	184	172
4010	124	123	115

Tafel III.

$2n$	G	G''	G_{Br}
4006	95	92	86
22	83	92	86
34	101	92	87
54	99	93	87
58	83	93	88
4078	95	93	88
4106	101	94	88
26	95	95	88
38	103	95	89
62	105	95	90
4166	103	95	90

Über eindeutige Zerlegung in Primelemente.

Von *Kurt Hensel* in Marburg a. L.

Es sei $J = J(a, \beta, \ldots)$ ein Integritätsbereich und $J(x) = J(a(x), \beta(x), \ldots)$ seine transzendente Erweiterung, d. h. die Gesamtheit aller ganzen Funktionen einer Veränderlichen x

$$(1) \qquad \begin{aligned} a(x) &= a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0, \\ \beta(x) &= \beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \beta_0, \ldots \end{aligned}$$

mit Koeffizienten in J. Ich nehme an, daß in J eindeutige Zerlegung in Primelemente besteht, d. h., daß jedes von Null und Einheiten verschiedene Element a in J bis auf assoziierte eindeutig in ein Produkt

$$a = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_\mu$$

von Primelementen aus J zerlegt werden kann; in den folgenden Zeilen will ich zeigen, daß das gleiche auch für den Erweiterungsbereich $J(x)$ gilt.

Dazu ordne ich den von Null verschiedenen Elementen $a, \beta, \ldots$ von J die folgenden Elemente

$$\chi(a) = t^\mu, \qquad \chi(\beta) = t^\nu, \ldots$$

als Charaktere zu, in denen t eine Unbestimmte und $\mu, \nu, \ldots$ die Anzahl der Primfaktoren von $a, \beta, \ldots$ bedeutet; und ich nenne

$$\begin{array}{llll} a > \beta, & a \sim \beta & \text{oder} \quad a < \beta, & \text{je nachdem} \\ \mu > \nu, & \mu = \nu & \text{oder} \quad \mu < \nu & \text{ist.} \end{array}$$

Auf Grund dieser Größenordnung ist dann die Menge aller von Null verschiedenen Charaktere wohlgeordnet, weil offenbar jede Teilmenge $(\chi(a'), \chi(\beta'), \ldots)$ ein kleinstes Element enthält, und ferner ist für irgend zwei Elemente

$$\chi(a\beta) = \chi(a)\,\chi(\beta) = t^{\mu+\nu}.$$

Genau ebenso kann man nun den Elementen $a(x), \beta(x), \ldots$ von $J(x)$ je einen Charakter $\chi(a(x)), \chi(\beta(x)), \ldots$ zuordnen und auf Grund derselben auch für diese eine genau entsprechende Wohlordnung angeben, aus der dann der zu beweisende Satz fast unmittelbar folgt.

Dazu sei allgemein

$$\bar{a} = (a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0)$$

der größte gemeinsame Teiler aller Koeffizienten eines beliebigen Elementes $a(x)$ von $J(x)$ und

$$a(x) = \bar{a}\, a_0(x),$$

wo also $a_0(x)$ das zu $a(x)$ gehörige primitive Element bedeutet; $\bar{a}$ heiße dann der Koeffiziententeiler von $a(x)$; ebenso sei $\beta(x) = \bar{\beta}\beta_0(x), \ldots$ Dann zeigt man in bekannter Weise, daß das Produkt $a_0(x)\beta_0(x)$ zweier primitiven Elemente von $J(x)$ keine Primzahl π von J enthält, also wieder primitiv ist. Hieraus folgt, daß der Koeffiziententeiler eines Produktes $a(x)\beta(x) = \bar{a}\bar{\beta}a_0(x)\beta_0(x)$ gleich $\bar{a}\bar{\beta}$, d. h. gleich dem Produkte der Koeffiziententeiler seiner Faktoren ist.

Auf Grund dieser Tatsachen ordne ich nun jedem von Null verschiedenen Elemente $a(x)$ von $J(x)$ das Element

$$\chi(a(x)) = (x^m, \chi(\bar{a})) = (x^m, t^\mu) \tag{2}$$

als Charakter zu, wo m den Grad von $a(x)$ und μ die Anzahl der Primfaktoren des Koeffiziententeilers $\bar{a}$ bedeutet. Für diese zweigliedrigen Charaktere $\chi(a(x)) = (a, a')$ definiere ich die Multiplikation durch die Gleichung:

$$(a, a')(b, b') = (a\,b, a'\,b')$$

und die Größenbeziehung durch die Festsetzung, daß

$$(a, a') > (b, b')$$

sein soll, wenn $a > b$ oder wenn $a = b$ und $a' > b'$ ist; d. h. von zwei Elementen $a(x)$ und $\beta(x)$ ist $a(x) > \beta(x)$, wenn das erste von höherem Grade ist als das zweite oder wenn beide gleichen Grad haben und der erste Koeffiziententeiler mehr Primfaktoren enthält als der zweite. Sie sollen äquivalent heißen, wenn sie vom gleichen Grade sind und gleich viele Koeffizientenprimteiler besitzen. Auf Grund dieser Größenanordnung ist dann auch die Menge aller $\chi(a(x))$ wohlgeordnet, da jede Teilmenge $(\chi(a'(x)), \cdots)$ offenbar wieder ein kleinstes Element besitzt.

Ferner besteht auch für diese Charaktere allgemein die Gleichung:

$$\chi(a(x)\beta(x)) = \chi(a(x))\chi(\beta(x)) = (x^{m+n}, t^{\mu+\nu}),$$

da nach der vorigen Bemerkung das Produkt $a(x)\beta(x)$ den Grad $m+n$ und den Koeffiziententeiler $\bar{a}\bar{\beta}$ hat.

Ist $a(x) \gtrsim \beta(x)$ und $\gamma(x) \neq 0$ ganz beliebig, so ist bei dieser Größenanordnung selbstverständlich $a(x)\gamma(x) \gtrsim \beta(x)\gamma(x)$ und umgekehrt.

Die kleinsten Elemente von $J(x)$ sind die Einheiten ε aus J, da ihnen und ihnen allein der kleinste Charakter $\chi(\varepsilon) = (1, 1)$, der Einheitscharakter, entspricht.

Jeder „eigentliche“ Teiler eines Elementes $\gamma(x)$, d. h. jeder weder zu $\gamma(x)$ selbst noch zu 1 assoziierte Divisor, ist kleiner als $\gamma(x)$ und größer als 1, da sein Charakter kleiner als $\chi(\gamma(x))$ und größer als $\chi(1) = (1, 1)$ ist.

Sind endlich $a(x) \gtrsim \beta(x)$ zwei beliebige Elemente von $J(x)$ und ist wenigstens $a(x)$ von positivem Grade, so kann man stets zwei andere Elemente $r(x)$ und $s(x)$ desselben Bereiches so auswählen, daß

$$s(x)a(x) - r(x)\beta(x) < a(x)$$

wird, und hier kann $s(x)$ prim zu $\beta(x)$ gewählt werden, wenn $\beta(x)$ primitiv ist.

Sind nämlich wieder m und n die Grade von $a(x)$ und $\beta(x)$, so ist n. d. V. $m \geqq n$ und wenigstens $m > 0$; dann folgt aus der Identität

$$\beta_n a(x) - a_m x^{m-n} \beta(x) = c_{m-1} x^{m-1} + \cdots < a(x),$$

daß in der obigen Ungleichung $s(x) = \beta_n$ und $r(x) = a_m x^{m-n}$ angenommen werden kann; und hier ist $s(x) = \beta_n$ prim zu $\beta(x)$, wenn $\beta(x)$ primitiv ist, weil für beliebiges $\gamma(x)$ aus der Teilbarkeit von $\beta\ \gamma(x)$ durch $\beta(x)$ notwendig die Teilbarkeit von $\gamma(x)$ durch $\beta(x)$ folgt, wenn $\beta(x)$ keinen Koeffiziententeiler hat.

Zunächst ergibt sich unmittelbar, daß in $J(x)$ Primteiler existieren und daß jedes Element dieses Bereiches mindestens auf eine Weise in Primfaktoren zerlegbar ist. In der Tat ist jeder kleinste eigentliche Teiler $\pi(x)$ eines beliebigen Elementes $\gamma(x)$ stets ein Primelement. Denn hätte $\pi(x)$ noch einen eigentlichen, also kleineren Divisor $\pi_0(x)$, so wäre dieser ein noch kleinerer Teiler von $\gamma(x)$, gegen die über $\pi(x)$ gemachte Voraussetzung.

Ist nun $\gamma(x)$ ein beliebiges Element von $J(x)$, $\pi(x)$ ein kleinster eigentlicher Teiler von $\gamma(x) = \pi(x)\gamma_1(x)$, so ist auch $\gamma_1(x) < \gamma(x)$; ist $\pi_1(x)$ ein kleinster eigentlicher Teiler von $\gamma_1(x) = \pi_1(x)\gamma_2(x)$, so ist $\gamma(x) = \pi(x)\pi_1(x)\gamma_2(x)$ und $\gamma_2(x) < \gamma_1(x)$, und durch entsprechendes Weiterschließen gelangt man nach einer endlichen Anzahl von Schritten zu einer Zerlegung $\gamma(x) = \pi(x)\pi_1(x) \cdots \pi_r(x)$ von $\gamma(x)$ in Primfaktoren.

Auf dieser Grundlage kann nun die Eindeutigkeit der Zerlegung in Primfaktoren folgendermaßen leicht erwiesen werden: Wäre diese Zerlegung nicht für alle Elemente von $J(x)$ eindeutig, so existierte mindestens ein kleinstes Element $\gamma(x)$, welches wenigstens auf zwei verschiedene Arten in Primfaktoren zerfiele, so daß etwa

$$\gamma = \pi_1 \cdots \pi_\mu = \varkappa_1 \cdots \varkappa_\nu$$

wäre. Dieses kleinste Element ist sicher von positivem Grade in x, da alle Elemente nullten Grades, d. h. alle Elemente von J, eindeutig in Primfaktoren zerfallen. Also gibt es sowohl unter den π_i als auch unter den $\varkappa_j$ mindestens eins von positivem Grade; π_1 und $\varkappa_1$ können und sollen daher von positivem Grade angenommen werden. Endlich ist kein π_i zu einem $\varkappa_j$ assoziiert, weil man sonst durch Wegdividieren ein kleineres Element γ' mit doppelter Primfaktorenzerlegung erhalten würde.

Ist nun von den beiden Primfaktoren positiven Grades π_1 und $\varkappa_1$ etwa $\pi_1 \gtrsim \varkappa_1$, so gibt es nach dem zuletzt bewiesenen Satze zwei Elemente r und s in $J(x)$, für welche

$$s\pi_1 - r\varkappa_1 < \pi_1$$

ist, und hier kann s prim zu $\varkappa_1$ gewählt werden, weil $\varkappa_1$ als Primelement von positivem Grade sicher primitiv ist. Bildet man dementsprechend das Element

$$\gamma' = (s\pi_1 - r\varkappa_1)\pi_2 \cdots \pi_\mu = \varkappa_1(s\varkappa_2 \cdots \varkappa_\nu - r\pi_2 \cdots \pi_\mu),$$

so ist dieses einerseits kleiner als γ, andererseits liefert diese Definitionsgleichung für γ' zwei verschiedene Zerlegungen von γ' in Primfaktoren, wenn man den ersten Faktor links und den zweiten Faktor rechts in Primelemente zerlegt. Denn in der Zerlegung rechts kommt der Primfaktor $\varkappa_1$ vor, und dieser tritt in der Zerlegung links sicher nicht auf; erstens ist nämlich $\varkappa_1$, wie oben erwähnt wurde, zu $\pi_2, \ldots, \pi_\mu$ nicht assoziiert, und zweitens kann $\varkappa_1$ auch nicht einer der Primfaktoren

von $s\pi_1 - r\varkappa_1$ sein, denn sonst wäre $\varkappa_1$ Teiler von $s\pi_1 - r\varkappa_1$, also von $s\pi_1$, also auch von π_1, weil s prim zu $\varkappa_1$ ist, entgegen dem oben Gesagten.

Da endlich $\gamma' \neq 0$ ist, weil aus $\gamma' = 0$: $s\pi_1 = r\varkappa_1$, also: $\varkappa_1$ assoziiert zu π_1 folgen würde, so ergäbe sich entgegen unserer Voraussetzung ein unter γ liegendes Element mit zwei verschiedenen Zerlegungen in Primfaktoren. Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Es sei nun allgemein $J(x, y, \ldots, z, u; a)$ der Integritätsbereich aller ganzen Funktionen von beliebig (endlich) vielen Unbestimmten $x, y, \ldots, z, u$, deren Koeffizienten einem Integritätsbereiche $J = J(a, \ldots)$ mit eindeutiger Zerlegung in Primfaktoren angehören. Dann folgt aus dem soeben geführten Beweise sukzessive, daß den Integritätsbereichen

$$J(u; a),\ J(z, u; a), \ldots,\ J(y \cdots z, u; a),\ J(x, y, \ldots, z, u; a)$$

ebenfalls eindeutige Zerlegung in Primfaktoren zukommt.

Ist ferner $\chi(a) = t^\sigma$ der zu jedem Elemente a von J gehörige Charakter, also σ die Anzahl seiner Primfaktoren, so entspricht im Bereiche $J(u; a)$ jedem Elemente $a(u)$ der Charakter

$$\chi(a(u)) = (u^s, t^\sigma),$$

wenn wieder s der Grad von $a(u)$ und σ die Anzahl der Primfaktoren seines Koeffiziententeilers $\bar{a}$ ist. Entsprechend gehört zu jedem Elemente

$$a(z, u) = a_r(u)z^r + a_{r-1}(u)z^{r-1} + \cdots + a_0(u)$$

von $J(z, u; a)$ der Charakter

$$\chi(a(z, u)) = (z^r, \chi(\bar{a}(u))) = (z^r, u^s; t^\sigma)$$

wo s der Grad des Koeffiziententeilers $\bar{a}(u)$ von $a(z, u)$ und σ die Anzahl der Primfaktoren des Koeffiziententeilers von $\bar{a}(u)$ ist, usw.

Im allgemeinen Erweiterungsintegritätsbereich $J(x, y, \ldots, z, u; a)$ endlich ist jedem von Null verschiedenen Elemente

$$a(x, y, \ldots, z, u; a) = a_m(y, \ldots z, u; a)x^m + \cdots + a_0(y, \ldots, z, u; a)$$

das folgende Element als Charakter zugeordnet:

$$\chi(a(x, y, \ldots, z, u; a)) = (x^m, y^n, \ldots, z^r, u^s; t^\sigma).$$

Hier ist m der Grad des Elementes $a(x, \ldots)$ in x, n der Grad seines Koeffiziententeilers in $y, \ldots$, während σ die Anzahl der Primfaktoren bedeutet, in welche der Teiler $\bar{a}$ aller Koeffizienten von $a(x, \ldots)$ zerfällt.

Es ist interessant, diese Charaktere $\chi(a(x, y, \ldots, z, u; a))$ mit denjenigen zu vergleichen, welche Herr *Hasse* in seiner im nächsten Bande dieses Journals erscheinenden Arbeit (Über eindeutige Zerlegung in Primelemente oder in Primhauptideale in Integritätsbereichen) den Elementen $a, \beta, \ldots$ eines allgemeinen Integritätsbereiches $J(a, \beta, \ldots)$ zuordnet, um mit ihrer Hilfe vier *hinreichende* Bedingungen dafür zu finden, damit in J eindeutige Zerlegung in Primfaktoren stattfindet. Die Charaktere $\chi(a(x, \ldots, u; a))$ genügen nämlich ebenfalls vier Bedingungen, von denen die beiden ersten vollständig mit den dort aufgestellten übereinstimmen, während die beiden letzten in gewissem Sinne allgemeiner sind als jene, und sich von ihnen in bemerkenswerter Weise unterscheiden.

JUBILÄUMSBAND II

AUS ANLASS DES 100 JÄHRIGEN BESTEHENS

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Hasse, Schaefer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 158.

Heft 4.

Mit Bildern von Schwarz, Frobenius, Hurwitz (Adolf) und Minkowski.

Ausgegeben den 30. Dezember.

PERIODICAL ROOM
GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG, VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1927

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 158. Heft 4.

(Jubiläumsband II.)

Mit Bildern von Schwarz, Frobenius, Hurwitz (Adolf) und Minkowski.

Inhaltsverzeichnis.

Sommerfeld, A., Asymptotische Darstellung von Formeln aus der Beugungstheorie des Lichtes . . . . . Seite 199

Kneser, Adolf, Neue Untersuchung einer Reihe aus der Theorie der elliptischen Funktionen . . . . . — 209

Plessner, A., Über das Verhalten analytischer Funktionen am Rande ihres Definitionsbereichs . . . . . — 219

Hasse, Helmut, Über das Reziprozitätsgesetz der m-ten Potenzreste . . . . . — 228

Wirtinger, Wilhelm, Über den Weierstrass'schen Vorbereitungssatz . . . . — 260

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Hermann Amandus Schwarz
geb. 25. Januar 1843, gest. 29. November 1921.

Ferdinand Georg Frobenius
geb. 26. Oktober 1849, gest. 3. August 1917.
[aus Acta mathematica 1882—1912, Table générale des Tomes 1—35].

Adolf Hurwitz
geb. 26. März 1859, gest. 18. November 1919.
[aus Acta mathematica 1882—1912, Table générale des Tomes 1—35].

Hermann Minkowski
geb. 20. Juni 1864, gest. 12. Januar 1909.

Band 158. Heft 4.

(Jubiläumsband II.)

Mit Bildern von Schwarz, Frobenius, Hurwitz (Adolf) und Minkowski.

Inhaltsverzeichnis.

Sommerfeld, A., Asymptotische Darstellung von Formeln aus der Beugungstheorie des Lichtes . . . . . Seite 199

Kneser, Adolf, Neue Untersuchung einer Reihe aus der Theorie der elliptischen Funktionen . . . . . — 209

Plessner, A., Über das Verhalten analytischer Funktionen am Rande ihres Definitionsbereichs . . . . . — 219

Hasse, Helmut, Über das Reziprozitätsgesetz der m-ten Potenzreste . . . . . — 228

Wirtinger, Wilhelm, Über den Weierstrass'schen Vorbereitungssatz . . . . . — 260

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Hermann Amandus Schwarz
geb. 25. Januar 1843, gest. 29. November 1921.

Ferdinand Georg Frobenius
geb. 26. Oktober 1849, gest. 3. August 1917.
(aus Acta mathematica 1882—1912, Table générale des Tomes 1—35).

Adolf Hurwitz
geb. 26. März 1859, gest. 18. November 1919.
(aus Acta mathematica 1882—1912, Table générale des Tomes 1—35).

Hermann Minkowski
geb. 20. Juni 1864, gest. 12. Januar 1909.

Asymptotische Darstellung von Formeln aus der Beugungstheorie des Lichtes.

Von *A. Sommerfeld* in München.

Ein hundertjähriges Jubiläum rechtfertigt es vielleicht, wenn wir mit weit zurückliegenden Dingen beginnen.

Franz Neumann hatte vor 90 Jahren im Botanischen Garten zu Königsberg eine Station zur Messung der Erdtemperaturen angelegt. Die Erdthermometer wurden mit Unterbrechung bis zum Jahre 1886 abgelesen und dann entfernt. Die Königsberger Physikalisch-ökonomische Gesellschaft stellte als Preisaufgabe, das angesammelte Material zu verarbeiten. Ich beabsichtigte mich an der Preisarbeit zu beteiligen, kam aber nicht viel über die Vorbereitung hinaus. Diese bestand in der Konstruktion eines „harmonischen Analysators" (zusammen mit *E. Wiechert*, im Physikalischen Institut zu Königsberg ausgeführt und z. B. in *Dyck*'s Katalog Mathematischer Modelle, München 1892, veröffentlicht). Auch meine spätere Doktor-Arbeit „Die willkürlichen Funktionen in der mathematischen Physik" Königsberg 1891, hängen, wenn auch lose, mit dem Problem der Erdtemperaturen zusammen. Aber ich erhielt von da aus noch eine wesentlichere Anregung: die Erdthermometer waren in der Nähe einer Bodensenkung eingegraben; das Problem der Temperaturverteilung betraf also eigentlich nicht den von einer Ebene begrenzten *Halbraum*, sondern einen von zwei Ebenen begrenzten *Keil*. Das einfache Spiegelungsverfahren zur Erfüllung der Randbedingung, angewandt auf ein solches keilförmiges Gebiet, würde auf eine mehrfache Überdeckung des Raumes führen. Ich sagte mir also, daß es sich hier nicht um *eindeutige* Lösungen der Wärmeleitungsgleichung, sondern um *verzweigte* Lösungen derselben handle, die eindeutig sind in einem *Riemannschen Raum*, dessen Verzweigungslinie der Kante des Keils entspricht. Ich gelangte schließlich zu diesen verzweigten Lösungen durch umständliche Rechnungen, deren Endergebnis in einer Arbeit „Zur analytischen Theorie der Wärmeleitung", Math. Ann. Bd. 45, mitgeteilt sind.

Bald aber zeigte sich, daß die so gewonnene „Methode der verzweigten Lösungen" ein viel breiteres Anwendungsgebiet in der Beugungstheorie des Lichts besitzt: man fasse den Beugungsschirm als Verzweigungsschnitt eines *Riemann*schen Doppelraumes, seinen Rand als Verzweigungslinie auf. Von den beiden Raumexemplaren heiße das eine der „physikalische", das andere der „mathematische" Raum. Eine mathematisch exakte Behandlung des Beugungsproblems verlangt dann

eine Lösung u der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ (k = Wellenzahl des monochromatisch vorausgesetzten Lichtes), welche eindeutig ist in diesem *Riemann*schen Doppelraum, im Unendlichen desselben verschwindet und nur an einer Stelle desselben, nämlich im leuchtenden Punkte P des „physikalischen" Raumes eine vorgeschriebene Singularität hat. Wir nennen sie $u(P)$. Spiegelt man P an dem (als eben vorausgesetzten) Verzweigungsschnitt, so fällt der Bildpunkt P' in das „mathematische" Raumexemplar. Die diesem Spiegelpunkt P' zugeordnete Funktion $u(P')$ ist im „physikalischen" Raum durchweg endlich. Bildet man dann, je nach der Polarisation des Lichtes,

$$U = u(P) \mp u(P'),$$

so erfüllt U an der Oberfläche des Schirmes die Grenzbedingung

$$U = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial U}{\partial n} = 0,$$

die für einen *metallischen* (vollkommen reflektierenden, vollkommen leitenden) Schirm zu stellen ist, und liefert die im mathematischen Sinne exakte Lösung des Beugungsproblems. Läßt man den Anteil $u(P')$ des Spiegelpunktes weg, so erhält man in $u(P)$ selbst die Lösung des Problems für den sogenannten *schwarzen* (vollkommen absorbierenden, nicht reflektierenden) Schirm — allerdings mit einer gewissen Unbestimmtheit, welche dem Begriff des schwarzen Körpers anhaftet —.

§ 1. Die Funktion der ebenen Welle auf der *Riemann*schen Fläche.

Der einfachste Schirm ist die Halbebene; die Verzweigungslinie des betreffenden *Riemann*schen Raumes wird die Schirmkante, also eine unendliche Gerade. Läßt man überdies die Lichtquelle P senkrecht zur Schirmkante ins Unendliche rücken, geht also zur ebenen Welle über, so wird das Problem zweidimensional. Unsere Funktion $u(P)$ wird eindeutig auf einer *Riemann*schen *Fläche*. Wir verallgemeinern, indem wir statt der zweiblätterigen Fläche, die dem bisher betrachteten Doppelraum entspricht, eine n-blättrige *Riemann*sche Fläche betrachten, und stellen uns die folgende Aufgabe:

Gesucht eine Lösung u der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, welche in den Polarkoordinaten r, φ den folgenden Bedingungen genügt:

a) sie soll eindeutig sein auf der *Riemann*schen Fläche $-n\pi < \varphi < +n\pi$ mit einem n-fachen Windungspunkt an der Stelle $r = 0$;

b) sie soll auf der ganzen *Riemann*schen Fläche endlich und stetig sein, auch im Nullpunkte selbst (wo indessen ein Unendlichwerden des ersten Differentialquotienten zuzulassen ist, so jedoch, daß $r \frac{\partial u}{\partial r}$ daselbst noch endlich bleibt);

c) sie soll einer im Unendlichen des „ersten" Blattes aus der Richtung der positiven x-Achse einfallenden ebenen Welle entsprechen, dagegen im Unendlichen aller übrigen Blätter verschwinden, d. h. es soll im Limes $r = \infty$ gelten:

(1) $\quad u = u_0 = e^{ikx}, \quad$ wenn $\quad -\pi < \varphi < +\pi$ (erstes Blatt),

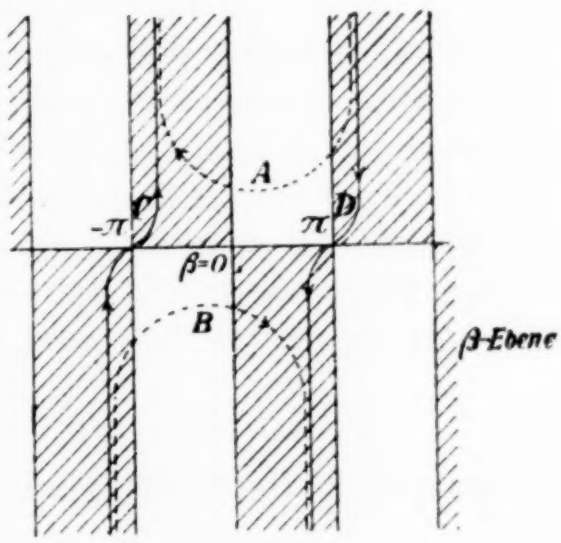
dagegen für die übrigen Blätter

(2) $\quad u = 0, \quad$ wenn $\quad |\varphi| < \pi$ (zweites, drittes, . . ., n-tes Blatt).

Der Weg, den ich zur Lösung dieses Problems ursprünglich, Mathemat. Ann. Bd. 47, gegangen bin, war sehr mühsam; ich habe ihn später vereinfacht, als ich die Beugung der Röntgenstrahlen in der Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 46 untersuchte. Dieser letztere Weg ist in die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. 5, Art. *Epstein*, übergegangen und wird ausführlicher in der neuen Auflage des *Riemann-Weber* Bd. 2 Kap. 13 dargestellt. Das Ergebnis ist ein Integral auf komplexem Wege, aus dem man ohne weiteres abliest, daß es die vorgenannten Eigenschaften erfüllt, nämlich:

$$u = \frac{1}{2\pi n}\int e^{ikr\cos\beta}\,\frac{e^{i\beta/n}}{e^{i\beta/n} - e^{-i\varphi/n}}\,d\beta. \tag{3}$$

Hier ist die Integration über die beiden in Fig. 1 punktierten Schleifen A, B zu führen mit dem aus der Fig. ersichtlichen Durchlaufungssinn. In der Figur sind diejenigen Streifen schraffiert, in denen bei reellem r der Exponent $ikr\cos\beta$ einen reellen *negativen* Bestandteil hat. Im Unendlichen dieser Streifen verschwindet also der erste Faktor des Integrales (3) in einer für die Konvergenz dieses Integrales hinreichenden Weise, während er im Unendlichen der nichtschraffierten Streifen unendlich wird. Daraus folgt gleichzeitig: für $r = \infty$ verschwindet das ganze Integral (3), wenn wir den Integrationsweg so deformieren können, daß er überall auf schraffiertem Gebiete verläuft. Dieses ist der Fall, wenn wir uns im zweiten, dritten, . . . Blatt der *Riemann*schen Fläche befinden. Der einzige Pol des Integranden von (3) ist nämlich die Stelle, $\beta = -\varphi$ (abgesehen von den um ganzzahlige Vielfache von $2\pi n$ dagegen verschobenen Stellen, welche für uns nicht in Betracht kommen). Ist nun $|\varphi| > \pi$, so liegt dieser Pol sicherlich nicht auf der Strecke $-\pi < \beta < +\pi$. Die Schleifen A und B können dann in die Wege C und D übergeführt werden, welche ganz auf schraffiertem Gebiet verlaufen. In diesem Falle erhält man also im Limes $r = \infty$:



Figur 1.

$$u = 0 \text{ entsprechend Bedingung (2).}$$

Befinden wir uns dagegen im ersten Blatt, ist also $|\varphi| < \pi$, so bleiben die Integrationswege A und B bei der Überführung in C und D an dem Pole $\beta = -\varphi$ hängen. Es tritt ein Umlauf um diesen Pol im positiven Sinne hinzu. Entwickelt man den Integranden in der Umgebung des Poles, so findet man

$$\frac{1}{2\pi n}\,\frac{e^{i\beta/n}}{e^{i\beta/n} - e^{-i\varphi/n}} = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{\beta + \varphi}\,(1 + \cdots).$$

Der Umlauf um den Pol liefert daher in diesem Falle als Wert des Integrales (3) im Limes $r = \infty$: $u = e^{ikr\cos\varphi} = e^{ikx}$ entsprechend der Bedingung (1). Hierdurch ist gezeigt, daß die Bedingung c) durch (3) erfüllt wird. Daß auch a) und b) befriedigt werden, ist evident.

Zur numerischen Berechnung des Integrales (3) stehen zwei Wege offen. Einmal eine Entwicklung nach *Bessel*schen Funktionen [1]).

$$(4) \qquad u = \sum_0^\infty c_m J_{\frac{m}{n}}(kr) \cos \frac{m}{n}\varphi, \quad c_m = \begin{cases} \frac{2}{n} e^{\frac{im}{n}\frac{\pi}{2}} & \text{für } m > 0 \\ \frac{1}{n} & \text{für } m = 0 \end{cases},$$

welche vollkommen den Potenzentwicklungen von *Puiseux* nach $z^{m/n}$ bzw. reell geschrieben nach $r^{m/n} \cos \frac{m}{n}\varphi$ im Gebiete der Funktionentheorie bzw. der zweidimensionalen Potentialtheorie entspricht. Die Reihe (4) konvergiert theoretisch unbegrenzt, ist aber praktisch brauchbar nur in der unmittelbaren Nähe des Verzweigungspunktes (für kleine kr). Wird die Entfernung ein Vielfaches der Wellenlänge (kr groß), so wird sie völlig unbrauchbar.

Viel wichtiger sind die asymptotischen Entwicklungen unserer Funktion, welche zwar divergent, aber für alle optischen Zwecke vorzüglich geeignet sind. Während ich solche Entwicklungen früher auf einem speziellen rechnerischen Wege und nur für die *Riemann*sche Fläche mit $n = 2$ ableiten konnte, möchte ich hier zeigen, daß sie ohne rechnerische Kunstgriffe und bei beliebigem n auf demjenigen Wege abgeleitet werden können, der für alle asymptotischen Probleme der gegebene ist, nämlich nach der Methode der Sattelpunkte (Paßmethode).

§ 2.

Asymptotische Darstellung in hinreichender Entfernung von der Schattengrenze.

Wie wir soeben sahen, ist der ursprüngliche Integrationsweg über die beiden Schleifen A, B dem Wege über die beiden Äste C, D äquivalent, sofern der „Aufpunkt" (r, φ) nicht im ersten Blatte liegt; liegt er im ersten Blatte, so tritt noch ein Umgang um den Pol hinzu, welcher den Wert e^{ikx} liefert. Wir brauchen uns also in jedem Falle nur mit der Integration über die Wege C und D zu befassen und setzen überdies voraus, daß kr eine große Zahl ist, was unter optischen Verhältnissen stets der Fall ist.

Wir setzen

$$(5) \qquad ikr \cos \beta = R + iS$$

und denken uns

$$(6) \qquad |z| = |e^{ikr\cos\beta}| = e^R$$

als Fläche über der β-Ebene modelliert. Diese Fläche zeigt folgenden topographischen Verlauf: sie schließt sich in den schraffierten Gebieten dem Null-Niveau ($z = 0$) engstens an, weist aber in den unschraffierten Gebieten Erhebungen und Senkungen auf, die umso steiler sind, je größer r wird. Wir haben also einen Wechsel zwischen Niederung und Gebirge. Der Weg C läuft ganz im Niederungsgebiete, passiert aber im Punkte $\beta = -\pi$ einen Sattelpunkt, an den rechts und links Ge-

[1]) Solche Entwicklungen bilden den Ausgangspunkt einer Arbeit von *H. Poincaré*, Acta Mathematica 20, 313, 1895.

birge anschließen. Im Sattelpunkte selbst ist $R = 0$, also $z = 1$. Es kommt bei der Integration darauf an [1]), den Sattelpunkt in einer Kurve steilsten Anstieges zu erreichen und in einer Kurve schnellsten Falles zu verlassen. Dies geschieht, wenn wir uns von dem rechts und links ansteigenden Gebirge möglichst gleichmäßig fernhalten, also in unserem Falle den Sattelpunkt unter 45^0 gegen die reelle Achse passieren. (Auf eine genauere Formulierung dieser Vorschrift kommen wir sogleich zurück.) Dasselbe gilt von dem Wege D. Beidemal können wir die Integration auf die nächste Umgebung der kritischen Punkte $\beta = \mp \pi$ beschränken und können den zweiten Faktor im Integrale (3), der in der Nähe der Sattelpunkte langsam veränderlich ist durch seinen Wert im Sattelpunkte selbst ersetzen. Wir führen statt β die neue Integrationsvariable s ein, nämlich die vom Sattelpunkte aus gezählte Länge des Integrationsweges, indem wir setzen:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \beta = \mp \pi + s e^{i\pi/4}, \quad d\beta = ds\, e^{i\pi/4} \\ \cos\beta = -\left(1 - \frac{i s^2}{2}\right) \end{array} \right\};$$

dann wird

$$\int_C e^{ikr\cos\beta}\, d\beta = -\int_D e^{ikr\cos\beta}\, d\beta = e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-\frac{kr}{2}s^2}\, ds,$$

also bei endlichem ε und beliebig wachsendem kr gleich

$$\sqrt{\frac{2\pi}{kr}}\, e^{-i(kr - \pi/4)}.$$

Hiermit geht (3) über in das Produkt zweier Faktoren F und Φ, die nur von r und φ abhängen:

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u = F\Phi, \quad F = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi kr}}\, e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} \\ \Phi = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{e^{-i\pi/n}}{e^{-i\pi/n} - e^{-i\varphi/n}} - \dfrac{e^{+i\pi/n}}{e^{+i\pi/n} - e^{-i\varphi/n}} \right) = \dfrac{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\varphi/n - \cos\pi/n} \end{array} \right\}.$$

Der erste Faktor F stellt, räumlich gesprochen, eine Zylinderwelle dar, welche von dem Schirmrande ($r = 0$) auszugehen scheint. Flächen gleicher Phase sind die Zylinder $r =$ konst.; die Amplitudenabnahme mit $\sqrt{r}$ entspricht dem Umstande, daß das Amplitudenquadrat (die Intensität), multipliziert mit dem Zylinderumfange $2\pi r$, beim Fortschreiten der Welle konstant bleiben muß. (Bei der Kugelwelle haben wir aus dem entsprechenden Grunde als Amplitudenfaktor r^{-1} an Stelle von $r^{-1/2}$.) Das Unendlichwerden für $r = 0$ ist natürlich nur durch den asymptotischen Charakter der Formel (8) vorgetäuscht und beruht auf einer unerlaubten Extrapolation dieser Formel. In Wirklichkeit ist u für $r = 0$ endlich und stetig. Es ist interessant

[1]) Das Verfahren ist bekanntlich von *Debye* zum Zweck der asymptotischen Darstellung der *Bessel-Hankel*schen Funktionen bei großem Argument und beliebigem Index ausgearbeitet worden. Vgl. Mathem. Ann. 67, 535, 1909, Sitzungsber. der Münchener Akademie 40, Nr. 5, 1910 und ist seitdem wohlbekannt. Eine Andeutung in derselben Richtung, die sich in einem nachgelassenen Fragment *Riemanns* findet, war unbeachtet geblieben.

zu bemerken, daß das Auge, welches z. B. aus dem Gebiete des geometrischen Schattens nach der Kante hinblickt und auf diese akkomodiert, unwillkürlich eine solche unerlaubte Extrapolation vornimmt und daher die Schirmkante als feine leuchtende Linie sieht, wie schon von dem Vater der Beugungstheorie *Grimaldi* beschrieben wird. Auch sonst macht sich ja das Auge fortgesetzt solcher unerlaubter Extrapolationen schuldig, z. B. beim krummlinigen Strahlengang (fata morgana), wo es den Ursprung des Lichtstrahls (das Objekt) in die Tangente des wahrgenommenen gekrümmten Lichtstrahls verlegt.

Der zweite Faktor Φ von (8) zeigt, daß noch bis tief in den geometrischen Schatten Licht hinein gebeugt wird, allerdings mit zunehmendem Beugungswinkel in abnehmendem Maße. Die Schattengrenze (Grenze des ersten Blattes, aus dem die einfallende Welle kommt) ist gegeben durch $\varphi = \pm \pi$. Hier wird Φ nach (8) scheinbar unendlich, was indessen abermals eine unerlaubte Extrapolation darstellt, da unsere Formel nur in hinreichendem Abstande von der Schattengrenze Gültigkeit beanspruchen kann. Die genauere Darstellung für die Nähe der Schattengrenze werden wir im folgenden Paragraphen besprechen. Der stetige Abfall für $\varphi > \pi$ wird aber durch (8) richtig dargestellt. Das Gesetz dieses Abfalls ist besonders einfach in den beiden äußersten Fällen $n = 2$ bzw. $n = \infty$, wo es nach (8) übergeht in

$$\Phi = \frac{1}{2\cos \varphi/2} \quad \text{bzw.} \quad \Phi = \frac{2\pi}{\pi^2 - \varphi^2}.$$

Übrigens folgt die Tatsache, daß gebeugtes Licht bis tief in den geometrischen Schatten hinein nachgewiesen werden kann, nicht nur aus unseren verzweigten Lösungen, sondern läßt sich auch aus den *Kirchhoff*schen Formeln der Beugungstheorie ablesen [1]); die auf diesem Wege zu gewinnende Darstellung der gebeugten Intensität stimmt qualitativ mit unserer Darstellung in Gl. (8) überein.

Zunächst haben wir Genaueres über die Richtung des Integrationsweges in den Sattelpunkten nachzutragen. Diese sollte mit der Richtung der stärksten Änderung des reellen Teiles R in Gl. (5) übereinstimmen. Bezeichnen wir wie oben mit ds das Linienelement in dieser Richtung, mit dn dasjenige senkrecht dazu, so haben wir hiernach zu verlangen

$$\frac{\partial R}{\partial n} = 0.$$

Daraus folgt nach den *Cauchy-Riemann*schen Bedingungen auch

$$\frac{\partial S}{\partial s} = 0.$$

Der gesuchte Integrationsweg ist also dadurch bestimmt, daß auf ihm der imaginäre Teil S unseres Exponenten $ikr\cos\beta$ konstant ist, nämlich gleich dem Wert S_0 von S im Sattelpunkte. Dies gibt in unserem Falle nach (5), wenn wir statt (7) allgemeiner schreiben $\beta = \pm\pi + s e^{i\psi}$, für kleine Werte von s:

[1]) *E. Maey*, Diss. Königsberg, 1893, Ann. d. Phys. 49, 91, 1893.

$$R + iS = ikr\cos\beta = -ikr\cos(se^{i\psi})$$
$$= -ikr\left(1 - \frac{1}{2}s^2 e^{2i\psi} + \cdots\right)$$

$$S = -kr\left(1 - \frac{1}{2}s^2\cos 2\psi\right), \qquad S_0 = -kr.$$

Für den Integrationsweg $S = S_0$ haben wir also die Bedingung

$$\frac{kr}{2}s^2\cos 2\psi = 0, \quad \psi = \pm\frac{\pi}{4}.$$

Von diesen beiden Werten kommt aber mit Rücksicht auf die Fig. 1 sowohl bei dem Integrationswege C wie bei D nur $\psi = +\frac{\pi}{4}$ in Betracht, was zu beweisen war.

§ 3. Asymptotische Darstellung für die unmittelbare Nähe der Schattengrenze.

Befinden wir uns im Gebiete des geometrischen Schattens, so ist $|\varphi| > \pi$; der Pol des Integranden von (3) liegt dann außerhalb des Gebietes $-\pi < \beta < +\pi$. Nähern wir uns aber der Schattengrenze $\varphi = \pm\pi$, so rückt der Pol $\beta = -\varphi$ in die Nachbarschaft der kritischen Punkte $\beta = \mp\pi$. In diesem Falle ist es nicht mehr zulässig, den zweiten Faktor im Integral (3) als langsam veränderliche Funktion zu behandeln und bei der asymptotischen Aproximation vor das Integralzeichen zu ziehen, wie wir es bei der Ableitung von (8) getan hatten.

Wir schreiben dementsprechend Gl. (3) jetzt folgendermaßen:

$$(9) \qquad \left|\begin{array}{l} 2\pi n u = \int e^{f(\beta)}\,d\beta \\ f(\beta) = ikr\cos\beta - \log\left(1 - e^{-\frac{i}{n}(\varphi+\beta)}\right) \end{array}\right|$$

und berechnen die Lage der Sattelpunkte aus der Gleichung

$$(10) \qquad f'(\beta) = -ikr\sin\beta + \frac{1}{n}\frac{i}{1 - e^{\frac{i}{n}(\varphi+\beta)}} = 0.$$

Von den beiden Schattengrenzen $\varphi = \pm\pi$ betrachten wir z. B. diejenige, für die $\varphi = +\pi$ ist. Dann rückt der Pol $\beta = -\varphi$ auf den Integrationsweg C der Fig. 1, während der Integrationsweg D durch die jetzige Lage des Poles nicht in Mitleidenschaft gezogen wird. Wir setzen, indem wir nur den Weg C betrachten:

$$\beta = -\pi + \gamma, \qquad \delta = \varphi - \pi,$$

wo δ als Beugungswinkel bezeichnet werden kann, $\delta < 0$ im geometrischen Schatten, $\delta > 0$ im beleuchteten Gebiet. Aus (10) folgt

$$\sin\gamma = -\frac{1}{nkr}\frac{1}{1 - e^{\frac{i}{n}(\gamma+\delta)}},$$

und wenn wir γ und δ als kleine Größen behandeln,

$$(11) \qquad \gamma(\gamma+\delta) = \frac{1}{ikr}, \qquad \left.\begin{matrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{matrix}\right\} = -\frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{ikr} + \frac{\delta^2}{4}}.$$

Der Sattelpunkt spaltet sich also auf: statt des einen Wertes $\beta = -\pi$ haben wir jetzt zwei benachbarte Sattelpunkte

$$\beta_1 = -\pi + \gamma_1 \quad \text{und} \quad \beta_2 = -\pi + \gamma_2 .$$

Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

a) unmittelbare Nähe der Schattengrenze: $\frac{\delta^2}{4} \ll \frac{1}{kr}$. Dann wird

$$\gamma_1 = +\sqrt{\frac{1}{ikr}} = e^{-\frac{i\pi}{4}} (kr)^{-1/2}$$

$$\gamma_2 = -\sqrt{\frac{1}{ikr}} = e^{+\frac{3i\pi}{4}} (kr)^{-1/2}.$$

Die beiden Sattelpunkte liegen einander diametral gegenüber in bezug auf die frühere Lage $-\pi$ des Sattelpunktes.

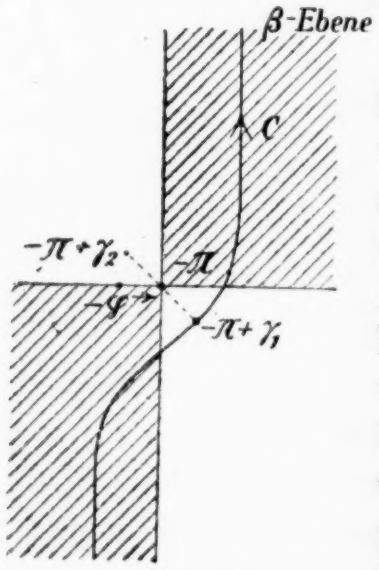
b) Merklicher Abstand von der Schattengrenze: $\frac{1}{kr} \ll \frac{\delta^2}{4}$. Dann wird

$$\gamma_1 = -\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = 0, \quad \gamma_2 = -\frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} = -\delta.$$

Die zugehörigen Werte von β sind

$$\beta_1 = -\pi, \quad \beta_2 = -\pi - \delta = -\varphi.$$

β_1 ist dann identisch mit der Lage des Sattelpunktes im vorigen Paragraphen, β_2 mit der Lage des Pols. Im Grenzfall b) nähern wir uns also bereits den Verhältnissen des vorigen Paragraphen.



Figur 2.

Im Anschluß an Fig. 2 schildern wir die Sachlage in beiden Fällen a) und b) folgendermaßen: Während wir uns mit dem Aufpunkte $\varphi = \pi + \delta$ von dem Gebiet des geometrischen Schattens her ($\delta > 0$) der Schattengrenze ($\delta = 0$) nähern, rückt der Pol $\beta = -\varphi$ längs der reellen Achse der β-Ebene auf den Punkt $\beta = -\pi$ hin. So lange $\delta/2$ noch groß ist gegen $(kr)^{-1/2}$, Grenzfall b), haben wir einen Sattelpunkt an der Stelle $\beta = -\pi$ wie im vorigen Paragraphen. Durch diesen Punkt geht der Integrationsweg C hindurch. Im Pole $\beta = -\varphi$ liegt ein zweiter Sattelpunkt. Der Pol bedeutet für den absoluten Betrag des Integranden topographisch ein Gebirge mit positiven und negativen Erhebungen. Dieses drängt sich zwischen die früher schraffierten Gebiete hinein und drückt den Sattelpunkt $\beta = -\pi$ zur Seite. Im Grenzfall a), wo wir uns mit dem Aufpunkt hart an der Schattengrenze, also mit dem Pol hart an der Stelle $\beta = -\pi$ befinden, ist dieser Sattelpunkt nach rechts unten ausgewichen und hat die Lage $\beta_1 = -\pi + \gamma_1$ angenommen. Der andere Sattelpunkt, der sich aus dem Pol entwickelt hat, ist nach links oben gerückt und entspricht dem Werte $\beta_2 = -\pi + \gamma_2$. Aus Kontinuitätsgründen kommt dieser letztere Sattelpunkt für die Integration nicht in Betracht; der Integrationsweg C ist vielmehr dauernd durch den Sattelpunkt β_1 hindurchzuführen, der im Grenzfalle a) gegeben ist durch

(12) $$\beta_1 = -\pi + \gamma_1, \qquad \gamma_1 = e^{-i\pi/4}(kr)^{-1/2}.$$

Indem wir in der Nähe dieses Punktes entwickeln, schreiben wir

(13) $$f(\beta) = f(\beta_1) + 0 + \frac{1}{2} f''(\beta_1)(\beta - \beta_1)^2$$

und erhalten für das Integral (9)

(14) $$2\pi n u = e^{f(\beta_1)} \int e^{\frac{1}{2} f''(\beta_1)(\beta-\beta_1)^2} d\beta .$$

Nach der Definition von $f(\beta)$ in (9) wird wegen (12)

$$e^{f(\beta_1)} = \frac{e^{-ikr\cos\gamma_1}}{1 - e^{-\frac{i}{n}(\gamma_1+\delta)}} = \frac{n}{i} e^{-ikr} \frac{e^{\frac{i}{2} kr\gamma_1^2}}{\gamma_1 + \delta}$$

und mit Rücksicht auf den Wert von γ_1 in (12) und auf die Bedingung a)

(15) $$e^{f(\beta_1)} = n e^{-ikr - \frac{i\pi}{4}} \sqrt{ekr}.$$

Die Paßhöhe im Punkte $\beta = \beta_1$ ist also gegen früher erheblich vergrößert, d. h. der Übergang aus dem einen in das andere Niederungsgebiet ist jetzt beschwerlicher. Die Paßhöhe beträgt nämlich:

$$|e^{f(\beta_1)}| = n|\sqrt{ekr},$$

während sie früher gleich 1 war.

Der Wert von $f''(\beta_1)$ folgt aus (10) zu

$$f''(\beta_1) = -ikr\cos\beta_1 - \frac{1}{n^2} \frac{e^{\frac{i}{n}(\varphi+\beta_1)}}{\left(1 - e^{\frac{i}{n}(\varphi+\beta_1)}\right)^2},$$

und dies gibt wegen (12) und der Bedingung a)

(16) $$f''(\beta_1) = 2ikr.$$

Der Integrationsweg führt, wie Fig. 2 andeutet, nach wie vor unter 45^0 durch den Punkt $\beta = \beta_1$ hindurch. Denn nach unserer Regel vom Ende des vorigen Paragraphen ist er bestimmt durch die Gleichung $S = S_0$, wo S den imaginären Teil von $f(\beta)$ und S_0 denjenigen von $f(\beta_1)$ bedeutet. Es ist aber $S - S_0$ nach (13) gleich dem imaginären Teil von $\frac{1}{2} f''(\beta_1)(\beta - \beta_1)^2$, also nach (16) $= krs^2\cos 2\psi$, wo ähnlich wie am Ende des vorigen Paragraphen gesetzt ist

(17) $$\beta - \beta_1 = s e^{i\psi}.$$

Die Bedingung $S = S_0$ liefert also wieder $\cos 2\psi = 0$, $\psi = \pi/4$ wie behauptet.

Indem wir (15), (16) und (17) in (14) einsetzen und die Integration von $s = -\varepsilon$ bis $s = +\varepsilon$ erstrecken, erhalten wir

(18) $$2\pi u = e^{-ikr}\sqrt{ekr} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-krs^2} ds,$$

also bei endlichem ε und unendlich groß werdenden kr

$$u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{e}{\pi}}\, e^{-ikr}. \tag{19}$$

Wir sehen hieraus:

1. Das scheinbare Unendlichwerden des früheren Ausdrucks (8) an der Schattengrenze ist bei genauerer Approximation fortgefallen, u nähert sich hier tatsächlich einem endlichen Werte.

2. Unsere Rechnung ist aber noch nicht genau genug. Der exakte Wert von u auf jeder der beiden Schattengrenzen $\varphi = \pm\pi$ für hinreichend große Werte von kr lautet in Wirklichkeit

$$u = \frac{1}{2}\, u_0 = \frac{1}{2}\, e^{-ikr}, \tag{20}$$

wo $u_0 = e^{ikx}$ die einfallende Welle bedeutet. Gl. (20) folgt aus einer allgemeinen Beziehung, welche die Werte $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ von u in irgendwelchen n übereinander liegenden Punkten der *Riemann*schen Fläche miteinander verknüpft, nämlich

$$u_0 = u_1 + u_2 + \cdots + u_n. \tag{21}$$

Diese Beziehung ist analog zu dem Satz von der Rationalität der symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung oder der Zweige einer algebraischen Funktion. Ihr Beweis ergibt sich daraus, daß die rechte Seite von (21) ebenso wie die linke eine in der schlichten Ebene eindeutige und überall endliche Lösung der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ mit gleichem Verhalten im Unendlichen darstellt. Handelt es sich nun speziell um eine der beiden Schattengrenzen, so werden die zugehörigen Werte von u, sagen wir u_1 und u_2, unter sich aus Symmetriegründen gleich, während die übrigen Werte $u_3, u_4, \ldots$ im Limes $kr = \infty$ dagegen verschwinden. Wir haben also in der Tat

$$u_1 = u_2 = \frac{1}{2}\, u_0 .$$

3. Der Faktor $\sqrt{\frac{e}{\pi}}$ in (19) ist hiernach in Wirklichkeit durch 1 zu ersetzen. Die Ungenauigkeit unserer Rechnung rührt daher, daß wir die Entwicklung (13) mit dem zweiten Gliede abgebrochen haben, obgleich die folgenden Glieder, wie man im einzelnen nachrechnet, Beiträge von gleicher Größenordnung liefern.

4. Im Falle $n = 2$ läßt sich unsere verzweigte Lösung, wie früher, Mathematische Annalen 47, gezeigt wurde, durch ein spezielles rechnerisches Verfahren in eine Darstellung mit *Fresnel*schen Integralen überführen, die insbesondere für die Nähe der Schattengrenzen numerisch bequem ist. Dadurch wird unsere Methode der verzweigten Lösungen den Formeln der klassischen Beugungstheorie von *Fresnel* und *Kirchhoff* angeschlossen.

Neue Untersuchung einer Reihe aus der Theorie der elliptischen Funktionen.

Von *Adolf Kneser* in Breslau.

Wie soviele wichtige mathematische Gebilde haben auch die ϑ-Funktionen im *Crelle*schen Journal das Licht der Welt erblickt, vor nunmehr hundert Jahren, im Jahre 1827, im dritten Bande des Journals und in der zweiten der Abhandlungen, die *Jacobi* unter dem Titel „Notices sur les fonctions elliptiques" veröffentlicht hat [1]). So mag es denn angebracht erscheinen, zur Hundertjahrfeier des Journals und der elliptischen Funktionen einen wichtigen Punkt aus der Theorie der ϑ-Funktionen zu erörtern, in welchem die einfachste Entwicklung nach dem von *Kronecker* oft proklamierten Prinzip der geringsten Mittel noch nicht erreicht zu sein scheint.

Stellen wir uns auf den Standpunkt der klassischen Abhandlung „Theorie der elliptischen Funktionen, aus den Eigenschaften der ϑ-Reihen abgeleitet", welche *Borchardt* unter *Jacobi*s Leitung nach dessen Vorlesung ausgearbeitet hat [2]), und behalten wir die Bezeichnungen dieser Abhandlung bei, also

$$\vartheta_1 x = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \cdots,$$

$$\vartheta_2 x = \vartheta_1\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\vartheta_3 x = 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \cdots,$$

$$\vartheta x = \vartheta_3\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

so fordert eine grundlegende Aufgabe, bei gegebenem Werte der Größe

$$k^2 = \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}, \qquad \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3},$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_2(0, q), \qquad \vartheta_3 = \vartheta_3(0, q)$$

die Größe q zu bestimmen. Denn aus elementaren Eigenschaften leitet die *Jacobi-Borchardt*sche Abhandlung die folgenden Formeln ab:

[1]) *Jacobi* Werke Bd. I, S. 255. Dies Journal Bd. 3, S. 303.

[2]) *Jacobi* Werke Bd. I, S. 497. Neudruck Ostwalds Klassiker Nr. 224 (1927).

$$x\vartheta_3^2 = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = F(\varphi, k),$$

$$\sin \varphi = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} \cdot \frac{\vartheta_1 x}{\vartheta x},$$

in welchen die Umkehrung des Integrals erster Gattung durch einen ϑ-Quotienten gegeben wird. Nun gibt *Jacobi* die Formel

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}, \qquad K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right),$$

$$K' = F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right), \qquad k^2 + k'^2 = 1,$$

und mit dieser Formel ist die ausgesprochene Aufgabe gelöst, aber offenbar nicht in praktischer Form; nur wenn man die *Legendre*schen Tabellen zur Hand hat, die K als Funktion von k angeben, ist eine wirkliche Berechnung von q möglich bei gegebenem Werte von k^2. Will man die Tabellen nicht benutzen oder sie kontrollieren oder eine große Genauigkeit erreichen, so ist zur Zahlenrechnung nur eine Reihenentwicklung brauchbar, die in einer ihrer möglichen Formen folgendermaßen lautet:

$$(1) \qquad q^{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{k}}{2} + 2\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^{13} + \cdots.$$

Sie hat, wie sich schließlich herausstellt, die Eigenschaft, daß die Koeffizienten der Potenzen von $\sqrt{k}$ die Summe 1 geben, so daß die starke Konvergenz der Reihe und die Möglichkeit, die Größe des Restes leicht und genau zu diskutieren, sofort ersichtlich wird.

Ich finde die Formel (1) in einer gewissen Modifikation zuerst in dem verdienstlichen und inhaltsreichen Werke von *Schellbach* über elliptische Integrale und ϑ-Funktionen (1864) [1]). In dem Werke von *Halphen* [2]) über elliptische Funktionen kommt die Formel ebenso wie bei *Schellbach* nur in dem Sinne vor, daß die Summe einiger ihrer ersten Glieder als Näherungssumme bezeichnet, nicht aber die Konvergenz der ganzen Reihe abgeleitet wird. *Weierstraß* sagt in einer Abhandlung vom Jahre 1884 [3]), er bediene sich in seiner Vorlesung seit vielen Jahren der Formel (1) oder einer ihr gleichwertigen, und beweist die Formel zum ersten Male in breit behaglicher Weise, selbstverständlich mit vollkommener Strenge und Allgemeinheit. Der Beweis nimmt in der Ausgabe der Gesammelten Werke zwölf gute Quartseiten ein. Es wird dabei wesentlich benutzt, was auch in der *Jacobi-Borchardt*schen Abhandlung vorkommt, daß, wenn man von q zu q^4 übergeht, der Modul k durch l^2,

$$l = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}},$$

[1]) *Schellbach*, Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunktionen, Berlin 1864, S. 60.

[2]) *Halphen*, Traité des fonctions elliptiques Bd. I, S. 271, Paris 1886.

[3]) *Weierstraß* Werke Bd. II, S. 257.

zu ersetzen ist. Es wird also eine Transformation vierter Ordnung der ϑ-Funktionen angewandt. In der Formel (1) steht dann links q, rechts l an Stelle von $\sqrt{k}$. Endlich leitet *Hermite* [1]) eine der Formel (1) verwandte ab, indem er nicht die Transformation vierter Ordnung, sondern die *Landen*sche Transformation benutzt; die Abhandlung von *Hermite*, in Kasan erschienen, dürfte wenig bekannt geworden sein und ist erst durch den Abdruck im vierten Bande der Gesammelten Werke (1917) weiteren mathematischen Kreisen zugänglich geworden. Sie enthält aber keine ausreichenden Konvergenzbeweise und ist insofern unvollständig. In rechnerischer Beziehung ist sie der *Weierstraß*schen Abhandlung an Kürze und Eleganz überlegen.

Eine kurze und zugleich strenge Ableitung der Formel (1) ergibt sich, wie im folgenden gezeigt werden soll, wenn man den Grundgedanken von *Hermite*, die Benutzung der *Landen*schen Transformation, mit den strengen Konvergenzbetrachtungen von *Weierstraß* kombiniert.

Ich bemerke noch, daß weder die Formel (1) noch eine ihr gleichwertige in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften trotz ihrer fundamentalen Bedeutung vorkommt, was ich nicht dem Verfasser des betreffenden Artikels zur Last lege, sondern dem in sich verfehlten System des berühmten Sammelwerkes.

I.

Wir beginnen mit einer Betrachtung der *Landen*schen Transformation, die in der *Jacobi-Borchardt*schen Abhandlung nicht vorkommt, aber mittels der in dieser Abhandlung gebrauchten Methode leicht elementar und vollständig abgeleitet werden kann, indem man sich einen Gedanken von *Schellbach* zunutze macht, der sonst in der Literatur nur noch bei *Enneper* [2]) und *Schlömilch* [3]) vorkommt. Man bildet nämlich mittels der Formeln

$$\vartheta_3 x = \sum_n e^{n^2 \lg q - 2nxi}$$

$$\vartheta_3 y = \sum_\nu e^{\nu^2 \lg q - 2\nu yi} ,$$

in denen n und ν alle ganzen Zahlen bedeuten, das Produkt

$$\vartheta_3 x \cdot \vartheta_3 y = \sum_{n,\,\nu} e^{\lg q \cdot (n^2+\nu^2) - 2i(nx+\nu y)} ,$$

schreibt den Exponenten des unter dem Summenzeichen stehenden Gliedes in der Form

$$2 \lg q \cdot [\tfrac{1}{4}(n+\nu)^2 + \tfrac{1}{4}(n-\nu)^2] - 2i\,[\tfrac{1}{2}(n+\nu)(x+y) + \tfrac{1}{2}(n-\nu)(x-y)]$$

und bedenkt, daß die Gesamtheit aller Zahlen $\frac{1}{2}(n+\nu)$, $\frac{1}{2}(n-\nu)$ identisch ist mit der Gesamtheit aller ganzen Zahlen m, vermehrt um die Gesamtheit aller Zahlen von der Form $m + \frac{1}{2}$, daß ferner, wenn auch μ alle ganzen Zahlen durchläuft.

---

[1]) *Hermite* Oeuvres Bd. IV, S. 470. Bulletin de la société physico-mathématique de Kazan, sér. 2, Bd. 6, 1897.

[2]) *Enneper*, Elliptische Funktionen, Halle 1876, S. 100.

[3]) *Schlömilch*, Kompendium der höheren Analysis Bd. II, 4. Aufl. (1895), S. 455.

$$\vartheta_2 x = \sum_m e^{(m+\frac{1}{2})^2 \lg q + (2m+1)xi} = \sum_\mu e^{(\mu+\frac{1}{2})^2 \lg q + (2\mu+1)xi}.$$

Bezeichnet man nun $\frac{1}{2}(n+\nu)$ durch m oder $m+\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}(n-\nu)$ durch μ oder $\mu+\frac{1}{2}$, so sind die Zahlen $\frac{1}{2}(n+\nu)$ und $\frac{1}{2}(n-\nu)$ gleichzeitig durch m und μ oder durch $m+\frac{1}{2}$ und $\mu+\frac{1}{2}$ darzustellen, und m und μ durchlaufen wiederum alle ganzen Zahlen. Der obige Ausdruck $\vartheta_3 x \cdot \vartheta_3 y$ setzt sich also zusammen aus Gliedern von der Form

$$e^{2\lg q\cdot(m^2+\mu^2)-2i[m(x+y)+\mu(x-y)]}$$

und aus Gliedern, die aus den hingeschriebenen entstehen, wenn man m durch $m+\frac{1}{2}$ und μ durch $\mu+\frac{1}{2}$ ersetzt. Die Summen dieser beiden unendlichen Gliedergruppen sind aber offenbar

$$\vartheta_3(x+y,q^2)\,\vartheta_3(x-y,q^2)$$

und

$$\vartheta_2(x+y,q^2)\,\vartheta_2(x-y,q^2),$$

so daß sich die folgende Grundformel ergibt:

$$\vartheta_3 x\cdot\vartheta_3 y = \vartheta_3(x+y,q^2)\,\vartheta_3(x-y,q^2)+\vartheta_2(x+y,q^2)\,\vartheta_2(x-y,q^2).$$

Links ist $\vartheta_3 x$ natürlich kurz für $\vartheta_3(x,q)$ geschrieben usf.

Vermehrt man x und y um die Halbperioden $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{i}{2}\lg q$, $-\frac{i}{2}\lg q$, so ergeben sich die weiteren Formeln:

$$\begin{aligned}
\vartheta_2 x\cdot\vartheta_2 y &= \vartheta_2(x+y,q^2)\,\vartheta_3(x-y,q^2)+\vartheta_3(x+y,q^2)\,\vartheta_2(x-y,q^2)\\
\vartheta x\cdot\vartheta y &= \vartheta_3(x+y,q^2)\,\vartheta_3(x-y,q^2)-\vartheta_2(x+y,q^2)\,\vartheta_2(x-y,q^2)\\
-\vartheta_1 x\cdot\vartheta_1 y &= \vartheta_2(x+y,q^2)\,\vartheta_3(x-y,q^2)-\vartheta_3(x+y,q^2)\,\vartheta_2(x-y,q^2).
\end{aligned}$$

Setzt man in diesen Formeln einfach $x=y=0$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\vartheta_3^2 &= \vartheta_3(0,q^2)^2+\vartheta_2(0,q^2)^2\\
\vartheta_2^2 &= 2\,\vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^2)\\
\vartheta^2 &= \vartheta_3(0,q^2)^2-\vartheta_2(0,q^2)^2.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort

$$\begin{aligned}
\vartheta_3(0,q^2)^2 &= \tfrac{1}{2}(\vartheta_3^2+\vartheta^2)\\
\vartheta_2(0,q^2)^2 &= \tfrac{1}{2}(\vartheta_3^2-\vartheta^2)\\
\vartheta(0,q^2)^4 &= \vartheta^2\vartheta_3^2.
\end{aligned}$$

Setzt man also

$$\sqrt{k}=\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3},\qquad \sqrt{k'}=\frac{\vartheta}{\vartheta_3},\qquad \sqrt{k_1}=\frac{\vartheta_2(0,q^2)}{\vartheta_3(0,q^2)},\qquad \sqrt{k_1'}=\frac{\vartheta(0,q^2)}{\vartheta_3(0,q^2)},$$

so ergibt sich

$$k=\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1},\qquad k'=\frac{1-k_1}{1+k_1},\qquad k_1=\frac{1-k'}{1+k'}.$$

II.

Wir gehen aus von der Gleichung

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} = \frac{2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^{1\cdot 2} + q^{2\cdot 3} + \cdots)}{1 + 2q + 2q^4 + \cdots}$$

und schließen hieraus

$$\frac{k^2}{16} = \frac{q(1 + q^{1\cdot 2} + \cdots)^4}{(1 + 2q + 2q^4 + \cdots)^4} = q + q^2\,\mathfrak{P}(q),$$

wobei $\mathfrak{P}(q)$ eine Potenzreihe bedeutet. Nach den elementaren Sätzen über die Umkehrung von Potenzreihen sieht man also, daß, unter a, b, c konstante Koeffizienten verstanden, eine Entwicklung von der Form

$$q = \frac{k^2}{16} + c_2 k^4 + c_3 k^6 + \cdots$$

besteht. Aus ihr kann geschlossen werden, daß auch eine Entwicklung von der Gestalt

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} \lg q &= 2 \lg \frac{k}{4} + \lg (1 + 16 c_2 k^2 + 16 c_3 k^4 + \cdots) \\ &= 2 \lg \frac{k}{4} + b_1 k^2 + b_2 k^4 + \cdots \end{aligned}$$

aufgestellt werden kann. Es ist nun zu untersuchen, wie groß der Konvergenzbereich dieser Reihe ist, von dem die allgemeinen Sätze nur lehren, daß er von Null verschieden ist. Zu diesem Zwecke benutzen wir mit *Hermite* die Bemerkung, daß, wenn q in q^2 übergeht, die Größe k durch

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'}$$

zu ersetzen ist, woraus dann folgt:

$$\text{(3)} \qquad 2 \lg q = 2 \lg \frac{k_1}{4} + b_1 k_1^2 + b_2 k_1^4 + \cdots,$$

wobei wiederum die Größe des Konvergenzbereiches fraglich ist. Offenbar ergibt sich nun aus den Gleichungen (2) und (3)

$$\text{(4)} \qquad 4 \lg \frac{k}{4} + 2 b_1 k^2 + 2 b_2 k^4 + \cdots = 2 \lg \frac{k_1}{4} + b_1 k_1^2 + b_2 k_1^4 + \cdots.$$

Setzt man, um die Beziehung von k zu k_1 näher zu erkennen,

$$s = \frac{1 - \sqrt{1 - t}}{1 + \sqrt{1 - t}},$$

so kann diese Größe nach steigenden Potenzen von t entwickelt werden; offenbar ist

$$\text{(5)} \qquad s = \frac{1}{4} t + \cdots.$$

wobei höhere Potenzen von t weggelassen sind. Ferner ist die logarithmische Ableitung der Größe s nach t offenbar

$$\frac{1}{2\sqrt{1-t}}\left[\frac{1}{1-\sqrt{1-t}}+\frac{1}{1+\sqrt{1-t}}\right]=\frac{1}{t\sqrt{1-t}}=\frac{1}{t}(1-t)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{t}\left(1+\frac{1}{2}t+\frac{3}{8}t^2+\cdots\right),$$

und diese Reihe konvergiert nach bekannten Eigenschaften der Binomialreihe für $|t|<1$. Dasselbe gilt auch von der Reihe, die durch Integration aus ihr entsteht:

$$(6)\qquad \lg s=\lg t+c+\frac{1}{2}t+\frac{3}{8}\frac{t^2}{2}+\cdots=\lg t+c+\varepsilon_1 t+\varepsilon_2 t^2+\cdots,$$

und die Größen ε sind alle positiv, da dies von den Koeffizienten der Reihe für $(1-t)^{-\frac{1}{2}}$ gilt. Eben dies läßt sich aussagen von den Koeffizienten der Exponentiellen

$$s=te^{c+\varepsilon_1 t+\varepsilon_2 t^2+\cdots},$$

und die Formel (5) gibt

$$e^c=\frac{1}{4},\qquad c=-\lg 4.$$

Setzt man nun $t=k^2$, also $s=k_1$, so ergibt sich aus (4), indem das Glied $\lg k$ und das konstante Glied sich wegheben, eine Formel:

$$(7)\qquad 2\,[b_1k^2+b_2k^4+\cdots]=2\,[\varepsilon_1k^2+\varepsilon_2k^4+\cdots]+b_1k_1^2+b_2k_1^4+\cdots;$$

man braucht nur zu beachten, daß nach (6) die Gleichung

$$\lg k_1=2\lg k-\lg 4+\varepsilon_1k^2+\varepsilon_2k^4+\cdots,$$

oder auch

$$2\lg\frac{k_1}{4}=4\lg\frac{k}{4}+2\varepsilon_1k^2+2\varepsilon_2k^4+\cdots$$

besteht.

Betrachten wir die rechte Seite der Gleichung (7). Aus der Gleichung

$$k_1=\frac{1-k'}{1+k'}=\frac{k^2}{(1+k')^2}$$

ergibt sich zunächst bei positiven echten Brüchen k^2 die Ungleichung

$$k_1<k^2.$$

Wenn also die Reihe

$$b_1t+b_2t^2+\cdots$$

konvergiert für $|t|<\gamma$, wobei γ ein positiver echter Bruch ist, so konvergiert die Reihe

$$b_1k_1^2+b_2k_1^4+\cdots$$

sicher, sobald $k_1^2<\gamma$, also auch sicher, sobald $k^2<\sqrt{\gamma}$; denn dann ist ja

$$k_1^2<k^4<\gamma.$$

Die einzelnen Glieder der Reihe sind offenbar Potenzreihen von k^2, da

$$k_1=\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}$$

als Potenzreihe von k^2 darstellbar ist, und zwar in der Form

$$k_1 = \frac{1}{4} k^2 + k^4 \mathfrak{P}(k^2).$$

Diese Reihe konvergiert nach dem von der Reihe (6) Gesagten für $k^2 < 1$, also auch, wenn $k^2 < \sqrt{\gamma}$. Unter dieser Annahme konvergiert also die Doppelreihe

$$b_1 k_1^2 + b_2 k_1^4 + \cdots$$

und kann, da die einzelnen Glieder absolut konvergente Reihen sind, nach dem gewöhnlichen Doppelreihensatz [1]) in eine Potenzreihe von k^2 verwandelt werden, die ebenfalls für $k^2 < \sqrt{\gamma}$ konvergiert. Diese durch Umwandlung erhaltene Reihe unterscheidet sich aber der Gleichung (7) zufolge von der Reihe

$$b_1 k^2 + b_2 k^4 + \cdots$$

nur durch eine für $k^2 < 1$ stets konvergente Reihe

$$\varepsilon_1 k^2 + \varepsilon_2 k^4 + \cdots;$$

somit konvergiert die Reihe

$$T = b_1 t + b_2 t^2 + \cdots,$$

die wir als konvergent unter der Annahme $|t| < \gamma$ vorausgesetzt haben, auch für $|t| < \sqrt{\gamma}$. Die Wiederholung dieses Schlusses, indem man γ durch $\sqrt{\gamma}$ ersetzt, führt, da die Größen

$$\gamma^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma^{\frac{1}{4}}, \quad \gamma^{\frac{1}{8}}, \ldots$$

sich der Einheit annähern, zu dem Ergebnisse, daß die Reihe T konvergiert, sobald $|t| < 1$ ist.

III.

Aus der obigen Reihe (6) für $\lg s$ folgt, wenn man setzt

$$\left(\frac{1 - \sqrt{1-t}}{1 + \sqrt{1-t}}\right)^{2n} = \varepsilon_{0n} t^{2n} + \varepsilon_{1n} t^{2n+1} + \cdots,$$

daß die Koeffizienten $\varepsilon_{0n}, \varepsilon_{1n}, \ldots$ ebenfalls alle positiv sind. Setzt man $t = k^2$, so findet man

$$k_1^{2n} = \varepsilon_{0n} k^{4n} + \varepsilon_{1n} k^{4n+2} + \cdots,$$

und die Gleichung (7) ergibt jetzt:

$$2b_1 k^2 + 2b_2 k^4 + \cdots = 2(\varepsilon_1 k^2 + \varepsilon_2 k^4 + \cdots) + \sum_n^{1,\infty} b_n (\varepsilon_{0n} k^{4n} + \varepsilon_{1n} k^{4n+2} + \cdots).$$

Hieraus erhält man durch Vergleichung der Koeffizienten gleich hoher Potenzen von k^2:

$$\begin{aligned} 2b_1 &= 2\varepsilon_1 \\ 2b_2 &= 2\varepsilon_2 + b_1 \varepsilon_{01} \\ 2b_3 &= 2\varepsilon_3 + b_1 \varepsilon_{11} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Aus diesen Formeln ist ersichtlich, daß sowohl b_1 als auch die folgenden Größen b positiv sind. Allgemein erschließt man dies aus der Bemerkung, daß, wenn man die

[1]) *Schlömilch*, Kompendium der höheren Analysis Bd. I, 6. Aufl. (1923), § 42, S. 233.

Koeffizienten von k^{2m} beiderseits vergleicht, wobei links b_m der Faktor ist, rechts nur solche Glieder in Betracht kommen, in denen $2m = 4n, 4n+2, \ldots$ ist, wobei notwendig $n < m$, so daß jedes b_m aus den Größen b mit kleinerem Index zusammengesetzt erscheint, multipliziert mit positiven Faktoren ε. Ein positiver Anfangssummand ε_m kommt noch hinzu. Damit ist gezeigt, daß in der Formel

$$\lg q = 2 \lg \frac{k}{4} + b_1 k^2 + b_2 k^4 + \cdots \tag{8}$$

die Potenzreihe rechts konvergiert, sobald $|k^2| < 1$, und daß alle Koeffizienten b positiv sind. Die ersten Glieder der Reihe lauten:

$$\lg q = \lg \frac{k^2}{16} + \frac{1}{2} k^2 + \frac{13}{2^6} k^4 + \frac{23}{2^6 \cdot 3} k^6 + \cdots .$$

IV.

Wir erinnern an den Zusammenhang zwischen q und k^2, wenn letztere Größe ein positiver echter Bruch ist. Es ist ersichtlich, daß von den Größen

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}$$

bei wachsendem Werte von k^2 die erste wächst, die zweite abnimmt, so daß der Quotient

$$\frac{K'}{K}$$

bei wachsenden Werten von k^2 abnimmt, die Größe

$$\lg q = -\pi \frac{K'}{K}$$

also dann zunimmt. Die Werte von $\lg q$ sind dabei negativ. Läßt man k^2 gegen die Grenze 1 heranrücken, so wird K unendlich, K' hat $\frac{\pi}{2}$ zur Grenze, also strebt der Quotient

$$\frac{K'}{K}$$

der Null zu: es ist $\lim q = 1$, wenn $\lim k^2 = 1$ ist. Die Gleichung (8) ergibt also

$$4 \lg 2 = \lim_{k^2 = 1-0} (b_1 k^2 + b_2 k^4 + \cdots). \tag{9}$$

Hieraus folgt, daß die Summe

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots,$$

deren Glieder ja positiv sind, einen endlichen Wert hat. Wäre das nämlich nicht der Fall, so müßte die Summe

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_m$$

bei wachsenden Werten von m über alle Grenzen wachsen, etwa soweit, daß

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_m > g,$$

wobei g beliebig groß positiv vorgeschrieben sein kann. Ist m auf diese Weise be-

stimmt, so kann man k^2 als positiven Bruch so nahe der Einheit wählen, daß

$$b_1 k^2 + b_2 k^4 + \cdots + b_m k^{2m} > \frac{1}{2} g .$$

Es gilt also auch für die unendliche Reihe die Ungleichung

$$b_1 k^2 + b_2 k^4 + \cdots > \frac{1}{2} g ,$$

was aber der Gleichung (8) zufolge auf den Widerspruch führt:

$$\lg q - 2 \lg \frac{k}{4} > \frac{1}{2} g .$$

Die unendliche Reihe

$$S = b_1 + b_2 + \cdots$$

ist also konvergent und besitzt einen endlichen Wert. Jetzt lehrt der *Abel*sche Satz über Potenzreihen [1]) unmittelbar:

$$S = \lim_{k=1-0} (b_1 k^2 + b_2 k^4 + \cdots) ,$$

also nach (9):

$$S = 4 \lg 2 .$$

Hieraus ergibt sich eine ganz bestimmte Abschätzung des Fehlers, den man höchstens begeht, wenn man die Reihe

$$b_1 k^2 + b_2 k^4 + \cdots$$

etwa beim Gliede $b_m k^{2m}$ abbricht. Der Fehler ist kleiner als folgender Ausdruck:

$$k^{2m+2}(b_{m+1} + b_{m+2} + \cdots) = (4 \lg 2 - b_1 - b_2 - \cdots - b_m) k^{2m+2} .$$

Aus der Hauptformel (8) folgt weiter für jedes ganze oder gebrochene n:

$$(10) \quad q^n = \left(\frac{k^2}{16}\right)^n e^{(b_1 k^2 + b_2 k^4 + \cdots) n} = \left(\frac{k^2}{16}\right)^n (1 + a_1 k^2 + a_2 k^4 + \cdots).$$

Hier sind die Größen a durch Multiplikation und Addition der Größen b zusammengesetzt, also ebenfalls positiv. Durch dieselben Schlüsse wie für die Reihe mit den Koeffizienten b folgt auch hier wegen des Zusammenhangs der Grenzübergänge

$$\lim q = 1, \qquad \lim k^2 = 1,$$

daß die Summe der Koeffizienten a der Potenzen von k^2 konvergiert und den Wert 1 hat, d. h. daß die Gleichung (10) richtig und sinnvoll bleibt, wenn man einfach in ihr $q = k^2 = 1$ setzt.

Ausgerechnet sind die Formeln für $n = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$ in den ersten Gliedern:

$$(11) \quad q^{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{k}}{2} + 2\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^{13} + 1707\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^{17} + \cdots$$

$$(12) \quad q^{\frac{1}{2}} = \frac{k}{2^2} + \frac{k^3}{2^4} + \frac{17 k^5}{2^9} + \frac{45 k^7}{2^{11}} + \cdots$$

$$q = \frac{k^2}{2^4} + \frac{k^4}{2^5} + \frac{21}{2^{10}} k^6 + \frac{31}{2^{11}} k^8 + \cdots$$

[1]) *Dirichlet* Werke Bd. II, S. 303.

Benutzt man die aus der Form der ϑ-Reihen unmittelbar ersichtliche Tatsache, daß $\sqrt{k}$ in

$$l = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}$$

übergeht, wenn man q durch q^4 ersetzt, so gibt die Formel (11) die bei den älteren Autoren meist angeführte Gleichung

$$q = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + \cdots;$$

erinnert man sich der *Landen*schen Transformation, bei der q in q^2 und k in

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'}$$

übergeht, so gibt die Gleichung (12) die von *L. Lindelöf* [1]) gegebene Reihe

$$q = \frac{k_1}{2^2} + \frac{k_1^3}{2^4} + \frac{17\,k_1^5}{2^4} + \cdots.$$

[1]) *L. Lindelöf*, Acta societatis fennicae Bd. 16, S. 401.

Über das Verhalten analytischer Funktionen am Rande ihres Definitionsbereichs.

Von *A. Plessner* in Marburg a. d. L.

Es sei K der Einheitskreis $|z|<1$ in der Zahlenebene der komplexen Veränderlichen z, und $\zeta = f(z)$ eine im Einheitskreise definierte und dort meromorphe, d. h. bis auf Pole reguläre analytische Funktion. Wir werden im folgenden das Verhalten dieser Funktion zu untersuchen haben, wenn z sich einem Punkte P der Peripherie C von K nähert; diese Annäherung wird aber ausschließlich nur in Winkelräumen erfolgen, die ganz in K gelegen sind und durch zwei Geraden gebildet werden, die durch P gehen und C nicht berühren. Jeden solchen Winkel wollen wir mit $\alpha(P)$ bezeichnen. Die Gesamtheit aller Werte (Punkte der ζ-Ebene), denen die Funktion $f(z)$ in einem Winkelraum $\alpha(P)$ in jeder noch so kleinen Umgebung von P beliebig nahekommt, soll der zu $\alpha(P)$ gehörige Häufungsbereich des Punktes P heißen und mit $H_\alpha(P)$ bezeichnet werden [1]). Der Häufungsbereich $H_\alpha(P)$ ist nicht leer und eine abgeschlossene Menge. Die Vereinigungsmenge aller Häufungsbereiche $H_\alpha(P)$ für einen Punkt P definieren wir als den Randwertbereich [2]) im Punkte P und schreiben

$$R(P) = \sum_\alpha H_\alpha(P)\,.$$

Der Randwertbereich $R(P)$ braucht keine abgeschlossene Menge zu sein, ist aber immer darstellbar als Vereinigungsmenge von abzählbar unendlich vielen abgeschlossenen Mengen, ist also in der *Hausdorff*schen Terminologie ein F_σ [3]).

Ein Randpunkt P soll von der ersten Art heißen, wenn der Randwertbereich $R(P)$ aus einem Punkte besteht; jeder Häufungsbereich $H_\alpha(P)$ ist dann auch nur ein Punkt und die Funktion $f(z)$ nähert sich in jedem Winkel $\alpha(P)$ einem und demselben Grenzwert.

Ein Randpunkt P soll von der zweiten Art heißen, wenn jeder Häufungsbereich $H_\alpha(P)$ mit der ganzen komplexen ζ-Ebene identisch ist, d. h. wenn die Funktion

---

[1]) Der Begriff stammt von *Painlevé*, Compt. Rend. T. 131 (1900), S. 489, die Bezeichnung nach *Groß*, Monatsh. f. Math. u. Phys. Bd. 29 (1918), S. 15.

[2]) um eine Kollision mit dem Häufungsbereich in einem Punkte bei *Groß* loc. cit. zu vermeiden. Offenbar ist $R(P)$ die Gesamtheit aller *Stolz*schen Randwerte, d. h. der Randwerte, die man bei Annäherung in Punktfolgen, die ganz einem der Winkel $\alpha(P)$ angehören, erhalten kann.

[3]) *Hausdorff*, Grundz. der Mengenlehre (1914), S. 305.

in beliebiger Nähe von P in jedem noch so kleinen Winkel $\alpha(P)$ jedem Wert beliebig nahe kommt.

Setzt man an Stelle des Einheitskreises ein durch eine *Jordan*kurve C begrenztes Gebiet K, und besitzt C in einem Punkte P eine Tangente, so lassen sich für P die sämtlichen vorher eingeführten Begriffsbildungen übertragen, da man auch hier Winkelräume so definieren kann, daß sie in unmittelbarer Nähe von P in K liegen, und daß die Schenkel von Null verschiedene Winkel mit der Tangente in P bilden. Insbesondere wenden wir dies auf den Fall an, wo die *Jordan*kurve C rektifizierbar ist. Für die Punktmengen, die auf C liegen, läßt sich dann ein *Lebesgue*sches Maß definieren, indem man die Bogenlänge s (von einem Punkte gerechnet) als Parameter einführt, und den Punktmengen auf C das gewöhnliche *Lebesgue*sche Maß der linearen Menge der zugehörigen s-Werte als Maß zuordnet. Unter Zugrundelegung dieser Maßbestimmung existiert mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null eine bestimmte Tangente, so daß man daher „fast überall" auf C von den Häufungsbereichen $H_\alpha(P)$, dem Randwertbereich $R(P)$ und von Punkten der ersten oder zweiten Art sprechen kann. — *Wir nennen eine meßbare Teilmenge von C vom positiven Maß von der ersten bzw. zweiten Art, wenn sie, mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null, nur Punkte der ersten bzw. zweiten Art enthält.* Da bei der konformen Abbildung eines *Jordan*gebietes die Abbildung noch am Rande konform bleibt [4]), sobald im betreffenden Punkte eine Tangente existiert, und, wenn man noch die Rektifizierbarkeit der Begrenzungskurve hinzunimmt, nach einem Satze von *F.* u. *M. Riesz* [5]) Mengen vom Maße Null auf dem Rande wieder in solche übergehen, so besitzt diese Definition gegenüber den konformen Abbildungen auf *Jordan*gebiete mit rektifizierbarer Begrenzungskurve einen invarianten Charakter.

Mit diesen Begriffsbildungen läßt sich ein bekannter Satz von *Fatou* [6]), den wir wegen der eben erwähnten Invarianz allgemeiner formulieren, so aussprechen:

Satz von Fatou: Es sei K ein durch eine rektifizierbare *Jordan*kurve C begrenztes Gebiet, und $f(z)$ eine in K reguläre analytische und beschränkte Funktion. Dann ist C (in bezug auf $f(z)$) eine Menge von der ersten Art.

Als Hauptergebnis der weiteren Untersuchung beweisen wir die folgende Verallgemeinerung dieses Satzes:

Satz I. Es sei K ein durch eine rektifizierbare Jordankurve C begrenztes Gebiet, und $f(z)$ eine in K meromorphe Funktion. Dann gilt die Zerlegung

$$C = C_1 + C_2$$

wo C_1 bzw. C_2 Mengen von der ersten bzw. zweiten Art (in bezug auf $f(z)$) sind.

Die Zerlegung ist, wenn vorhanden, offenbar eindeutig, wenn man von Mengen

---

[4]) vgl. z. B. *Schlesinger*, Automorphe Funktionen, S. 158—161.

[5]) *F.* u. *M. Riesz*, Über Randwerte analytischer Funktionen, Stockholmer Kongreßbericht v. Jahre 1916. Der Satz wurde später auch von *Lusin* und *Priwaloff* gefunden. Vgl. *Priwaloff*, Das Cauchy'sche Integral (russisch), Saratow (1919), und *Lusin* et *Priwaloff*, Annales de l'Ecole Normale, Bd. 42 (1925). Für einen einfachen Beweis vgl. *F. Riesz*, Mathem. Zeitschrift. Bd. 18 (1923), S. 95.

[6]) *Fatou*, Acta Mathematica 30 (1906), S. 366 u. 363. Wie aus einem Zitat bei *Lusin* und *Priwaloff* hervorgeht, liegt ein Beweis des verallgem. *Fatou*schen Satzes von Herrn *Golubeff* vor, der den Satz von *F.* u. *M. Riesz* nicht benutzt.

vom Maße Null absieht, wir werden aber zwei Zerlegungen, die sich nur in Mengen vom Maße Null unterscheiden, als nicht verschieden ansehen. Dabei können C_1 oder C_2 ganz fehlen.

Offenbar kann dem Satze eine etwas allgemeinere Fassung gegeben werden, indem man den Definitionsbereich allgemeiner wählt und in der Berandung einen rektifizierbaren *Jordan*bogen bzw. abzählbar unendlich viele solcher Bögen voraussetzt. Der *Satz I* gilt dann für diesen Bogen bzw. für die Vereinigungsmenge der Bögen. Infolge den oben erwähnten Invarianz gegenüber der konformen Abbildung genügt es, den *Satz I* unter der Voraussetzung, daß C der Einheitskreis ist, zu beweisen, was in § 1 geschehen soll.

§ 1.

Es bedeutet hier K wieder den Einheitskreis $|z| < 1$, C seine Peripherie, und $\zeta = f(z)$ eine in K definierte und dort meromorphe Funktion. Jedem Punkte P von C ordnen wir *einen* der Winkel $a(P)$ zu, so daß die Lage dieser Winkel in zwei verschiedenen Punkten zu der (gerichteten) Tangente in den beiden Punkten dieselbe ist. Eine bestimmte von diesen unendlich vielen möglichen Zuordnungen soll festgehalten werden, und wir beweisen über sie den

Hilfssatz: Es bedeute A eine meßbare Teilmenge von C mit $mA > 0$, und es sei in jedem Punkte P von A der Häufungsbereich $H_a(P)$ (in bezug auf $f(z)$) nicht die ganze komplexe Ebene. Dann enthält A eine Teilmenge $\bar{A}$ von der ersten Art (in bezug auf $f(z)$).

Es sei $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k, \ldots$ eine Folge von Triangulierungen der komplexen ζ-Ebene, und $\gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \ldots, \gamma_{k,n_k}$ die Maschen von Γ_k. Dabei soll jedes Γ_k eine Unterteilung von Γ_{k-1} sein, und die Γ_k sollen mit wachsendem k beliebig fein werden, d. h. bei der stereographischen Abbildung auf die Kugel sollen die Maschen von Γ_k mit wachsendem k beliebig klein werden.

In bezug auf das Netz der γ_{km} kann man die Menge A folgendermaßen zerlegen. Wir sagen, ein Punkt P von A gehöre zu γ_{km}, wenn k der kleinste Index ist, so daß ein γ_{kn} zu $H_a(P)$ fremd ist, und m der kleinste Index unter den n, wenn mehrere in Betracht kommen, sonst aber $m = n$. Die Gesamtheit aller zu einem γ_{km} gehörigen Punkte heiße A_{km} [7]). Da $H_a(P)$ abgeschlossen und nach Voraussetzung nicht mit der ganzen komplexen Ebene identisch ist, so gehört jeder Punkt von A einer der Mengen A_{km} an, und wir haben also die Zerlegung:

$$A = \sum_{k,m} A_{km} .$$

Nach Voraussetzung ist $mA > 0$, und da die Mengen A_{km} nur in abzählbarer Menge auftreten, so folgt hieraus die Existenz eines $A_{k_1 m_1} = A'$, so daß $mA' > 0$.

Es sei nun $\bar{\zeta} = \dfrac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$ eine lineare Transformation der ζ-Ebene Z mit der

---

[7]) Die Menge A_{km} läßt sich durch Ungleichungen und Grenzübergänge bei meßbaren Funktionen definieren, ist also selbst meßbar; dasselbe gilt auch von den später auftretenden Mengen und wird in der Zukunft nicht mehr ausdrücklich erwähnt werden.

Eigenschaft, daß die Menge $\mathsf{Z} - \gamma_{k_1 m_1}$ auf einen beschränkten Bereich abgebildet wird. In der Menge $\mathsf{Z} - \gamma_{k_1 m_1}$ soll also $|\bar{\zeta}| < M$ sein. Da auf $A' = A_{k_1 m_1}$ der Häufungsbereich $H_a(P)$ in jedem Punkte in $\mathsf{Z} - \gamma_{k_1 m_1}$ enthalten ist, so folgt, daß die im Einheitskreis meromorphe Funktion

$$\bar{f}(z) = \frac{a f + b}{c f + d}$$

die Eigenschaft hat, daß für jeden Punkt P von A' im entsprechenden Winkel $a(P)$ $|\bar{f}(z)| < M$ ist, sobald man nur diejenigen Punkte z aus $a(P)$ in Betracht zieht, die auch im Kreisring $\varrho \leqq |z| < 1$ liegen, wobei ein $\varrho < 1$ für jeden Punkt von A' existiert, aber von ihm auch abhängig ist.

Es sei nun $\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 \cdots$ mit $\lim_{n\to\infty} \varrho_n = 1$, und jeder der Kreise $|z| = \varrho_k$ schneide die beiden Schenkel der Winkel $a(P)$. $G_n(P)$ bedeute die obere Schranke von $|\bar{f}(z)|$ wenn z die Werte aus $a(P)$ annehmen darf, für die $|z| \geqq \varrho_n$. Die Funktion $G_n(P)$ betrachten wir nur für Punkte von A' und setzen:

$$A'_n = A'(G_n(P) < M)\ ^{8}).$$

Die A'_n bilden eine aufsteigende Mengenfolge:

$$A'_1 < A'_2 < \cdots,$$

und es ist:

$$A' = \sum_n A'_n,$$

also folgt:

$$m A' = \lim_{n\to\infty} m A'_n,$$

und es gibt daher ein n_1, so daß $m A'_{n_1} > 0$.

Für die Menge A'_{n_1} gibt es also ein $\varrho = \varrho_{n_2}$, so daß $|f(z)| < M$, wenn 1.) P zu A'_{n_1} gehört, 2.) z zu $a(P)$ gehört und 3.) $|z| \geqq \varrho$. Dies gilt um so mehr, wenn wir statt A'_{n_1} eine perfekte Teilmenge $\bar{A}$ von A'_{n_1} betrachten, die wir noch so wählen können, daß $m\bar{A} > 0$. Bezeichnet man nun die zu $\bar{A}$ in bezug auf C komplementären Bögen mit i_k, so hat man die Zerlegung:

$$C = \bar{A} + \sum_k i_k.$$

Beschreiben wir um einen Eckpunkt P von i_k, also einen Punkt von $\bar{A}$, einen genügend kleinen Kreis $\varkappa$, so daß er den Bogen i_k schneidet, und verfolgen wir $\varkappa$ vom Schnittpunkt aus ins Innere von K, so treffen wir einen der beiden Schenkel von $a(P)$ zuerst an, und dieser soll der dem Bogen i_k näher gelegene Strahl l heißen. Wir ziehen nun in jedem der beiden Begrenzungspunkte P_1 und P_2 von i_k, die dem Bogen näher gelegenen Strahlen l_1 und l_2. Schneiden sich diese im Kreisringe $\varrho \leqq |z| < 1$, so sei Q ihr Schnittpunkt, sonst bedeute Q_1 bzw. Q_2 den Schnittpunkt von l_1 bzw. l_2 mit dem Kreis $|z| = \varrho$. Da bei genügender Kleinheit von i_k immer

[8]) Mit $A(G_n(P) < M)$ bezeichnen wir, wie üblich, die Teilmenge von A, in der die betreffende Ungleichung gilt.

ein Schnittpunkt Q vorhanden ist, so kann der zweite Fall nur bei endlich vielen Bögen i_k auftreten. Im ersten Falle ersetzen wir den Bogen i_k durch den Streckenzug $\overline{P_1 Q} \,.\, \overline{Q P_2}$, im zweiten durch den Weg $\overline{P_1 Q_1} \,.\, \overline{\widehat{Q_1 Q_2}} \,.\, \overline{Q_2 P_2}$, wo $\widehat{Q_1 Q_2}$ den Bogen auf dem Kreise $|z| = \varrho$ bedeutet. Vollziehen wir diese Ersetzung für jeden der Bögen i_k, so bekommen wir statt des Kreises C eine *Jordan*kurve $\overline{C}$, deren Innengebiet wir mit $\overline{K}$ bezeichnen. Da, wie man leicht nachrechnet, im Falle des Vorhandenseins des Schnittpunktes Q, die Länge des Streckenzuges $\overline{P_1 Q} \,.\, \overline{Q P_2}$ höchstens gleich $\dfrac{2 m i_k}{\sin \alpha}$ ($m i_k$ die Bogenlänge von i_k) sein kann, so ist, da die anderen Bögen nur in endlicher Anzahl vorkommen, auch die *Jordan*kurve $\overline{C}$ rektifizierbar. Die Konstruktion des Gebietes $\overline{K}$ ist nunmehr so geschehen, daß jeder Punkt von $\overline{K}$ der zugleich im Kreisring $\varrho \leqq |z| < 1$ liegt, auch in mindestens einem der zu den Punkten von $\overline{A}$ gehörigen Winkel $\alpha(P)$ liegt. Für alle Punkte z, die in $\overline{K}$ liegen und für die zugleich $|z| \geqq \varrho$ ist, ist also $|\overline{f}(z)| < M$, und da die Funktion $\overline{f}(z)$ im abgeschlossenen Kreise $|z| \leqq \varrho$ meromorph ist, so kann sie in $\overline{K}$ nur endlich viele Pole $c_1, c_2, \ldots, c_p$ (ein Pol höherer Ordnung mehrfach gezählt) besitzen. Bildet man

$$g(z) = (z - c_1)\ (z - c_2) \cdots (z - c_p)\, \overline{f}(z)\,,$$

so ist $g(z)$ in $\overline{K}$ regulär analytisch und außerdem noch beschränkt. Man darf also den verallgemeinerten *Fatou*schen Satz anwenden, und erhält, daß $\overline{C}$ in bezug auf $g(z)$ von der ersten Art ist. Dies gilt also auch für $\overline{f}(z)$ und somit auch für $f(z)$. Nun ist die Menge $\overline{A}$ den beiden Kurven C und $\overline{C}$ gemeinsam, außerdem besitzt $\overline{C}$ als rektifizierbare *Jordankurve* mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null, also auch fast überall auf $\overline{A}$, eine Tangente. Diese Tangente muß auf $\overline{A}$, da $\overline{A}$ perfekt ist, mit der Kreistangente zusammenfallen, also sind auf $\overline{A}$ abgesehen von einer Menge vom Maße Null die Randwertbereiche von $f(z)$ in K und $\overline{K}$ identisch, und somit $\overline{A}$ auch von der ersten Art, wenn man $f(z)$ in K betrachtet, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Der Beweis des *Satzes I* ist jetzt leicht zu Ende zu führen. Indem wir noch an der in diesem § festgesetzten Bedeutung der Winkel $\alpha(P)$ festhalten, zerlegen wir die Kreisperipherie in 3 Teilmengen:

$$C = C_1 + C_2^{(\alpha)} + C_3^{(\alpha)} \qquad (*)$$

Hier bedeutet C_1 die Menge aller Punkte P von C, die von der ersten Art sind, $C_2^{(\alpha)}$ die Menge aller Punkte P für die $H_\alpha(P)$ aus der ganzen komplexen Ebene besteht, und $C_3^{(\alpha)}$ die Menge aller übrigen Punkte der Kreisperipherie. Der Hilfssatz ergibt nun sofort, daß $m C_3^{(\alpha)} = 0$ ist. Denn wäre $m C_3^{(\alpha)} > 0$, so gäbe es nach dem Hilfssatz eine Teilmenge von $C_3^{(\alpha)}$ von der ersten Art, was aber unmöglich ist, da ja $C_3^{(\alpha)}$ nach Definition keine Punkte erster Art enthält. Es sei nun P ein Punkt von C, und $\alpha(P)$ habe jetzt wieder dieselbe Bedeutung wie in der Einleitung. Man kann nun auf mannigfache Weise eine abzählbare Menge von Winkeln

$a_1(P)$, $a_2(P)$, ... im Punkte P so angeben, daß zu jedem Winkel $a(P)$ ein Winkel $a_n(P)$ existiert, der in $a(P)$ enthalten ist. Jeden der Winkel $a_n(P)$ denken wir uns in alle anderen Punkte verpflanzt, so daß die am Anfang dieses Paragraphen aufgestellte Bedingung erfüllt ist. In bezug auf jeden dieser Winkel a_n kann man die obige Zerlegung (*)

$$C = C_1 + C_2^{(a_n)} + C_3^{(a_n)}; \quad m C_3^{(a_n)} = 0$$

machen. Ist nun $C_3 = \sum_n C_3^{(a_n)}$ die Vereinigungsmenge der $C_3^{(a_n)}$, $C_2 = \prod_n C_2^{(a_n)}$ der Durchschnitt der $C_2^{(a_n)}$, so folgt:

$$C = C_1 + C_2 + C_3,$$

und hier ist wieder C_3 vom Maße Null, da dies für jedes $C_3^{(a_n)}$ galt. Außerdem enthält C_2 bzw. C_1 nur Punkte von der zweiten bzw. ersten Art. Fügen wir also die Punkte von C_3 nach Belieben den Mengen C_1 und C_2 hinzu, so hat man die in Satz I behauptete Zerlegung.

§ 2.

Wir nehmen an, daß in der Zerlegung des Satzes I C_1 wirklich vorkommt, d. h. daß C eine Teilmenge von der ersten Art enthält. Jedem Punkte erster Art von C_1 entspricht dann eindeutig wieder ein Punkt in der ζ-Ebene als sein Randwertbereich. Über diese Zuordnung gilt noch der [9])

Satz II. Sind die Voraussetzungen des Satzes I erfüllt, und ist $f(z)$ keine Konstante, so bildet die Gesamtheit der Punkte erster Art von C, die denselben ζ-Punkt als Randwertbereich haben, eine Menge vom Maße Null.

Es genügt beim Beweis, C als den Einheitskreis vorauszusetzen. Wäre die betr. Menge vom positiven Maß, so könnte sie als die Menge A des Hilfssatzes des § 1 verwendet werden (die Voraussetzungen für die Anwendung des Hilfssatzes sind alle erfüllt), und es gäbe eine Funktion $\bar{f}(z) = \frac{af+b}{cf+d}$ mit den beim Beweis des Hilfssatzes angegebenen Eigenschaften; diese würde in jedem Punkte der dort mit $\bar{A}$ bezeichneten Teilmenge von A auch einen einzigen Punkt ζ_0 als Randwertbereich haben. Dann ist aber die Funktion

$$g(z) = (\bar{f}(z) - \zeta_0)(z - c_1)(z - c_2) \cdots (z - c_p)$$

in K regulär analytisch und beschränkt und nimmt auf der Menge $\bar{A}$ von positivem Maß fast überall den Randwert Null an, wenn die Annäherung an den Rand in den α-Winkeln erfolgt. Nach einem Satz von *F.* u. *M. Riesz* [10]) ist $g(z)$ also identisch gleich Null, die Funktion $\bar{f}(z)$ und mithin auch $f(z)$ eine Konstante.

[9]) Für beschränkte Funktionen zuerst von *F.* u. *M. Riesz* loc. cit [5]) bewiesen (vgl. die Darstellung bei *Bieberbach*, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, S. 155), allgemeiner für reguläre analytische Funktionen von *Lusin* u. *Priwaloff*, vgl. *Priwaloff* und *Lusin* u. *Priwaloff* loc. cit [5]). Vgl. auch *Fatou*, Bull. de la Soc. Math. de France (1921). Nach *Fatou*, Bull. d. sciences math. (1921) und *Lusin* u. *Priwaloff* ist es nicht möglich, den Satz so zu verschärfen, daß die Annäherung auf einer Kurve erfolgt, beim Kreise z. B. radial. Eine weitgehende Verallgemeinerung des Satzes II in anderer Richtung werde ich bei einer anderen Gelegenheit behandeln.

[10]) Vgl. loc. cit.[9])

Schreibt man $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, so wollen wir auch für die beiden konjugierten Potentialfunktionen die Bezeichnung meromorph beibehalten. Für die meromorphen Potentialfunktionen in den bisher zugrunde gelegten Bereichen lassen sich sämtliche aufgestellte Begriffe und Definitionen ohne weiteres übertragen. Also kann man auch hier von Häufungsbereichen, Randwertbereichen, Punkten bzw. Mengen erster oder zweiter Art sprechen. Die Häufungs- und Randwertbereiche denken wir uns dabei auf der reellen Achse $-\infty \leqq u \leqq +\infty$ gelegen, und dem Fall der ganzen komplexen Ebene entspricht hier die ganze reelle Achse (die beiden „Grenzpunkte" $+\infty$ und $-\infty$ eingeschlossen). Der Satz I ergibt als unmittelbare Anwendung:

Satz III. Es sei K ein durch eine rektifizierbare Jordankurve C begrenztes Gebiet, und $u(x, y)$ eine in K meromorphe Potentialfunktion. Dann a) gilt die Zerlegung

$$C = C_1 + C_2,$$

wo C_1 bzw. C_2 Mengen von der ersten bzw. zweiten Art (in bezug auf $u(x, y)$) sind.

b)[11] *diese Zerlegung ist identisch mit der entsprechenden Zerlegung für die zu $u(x, y)$ konjugierte Potentialfunktion $v(x, y)$.*

Die Mengen C_1 und C_2 (bis auf Mengen vom Maße Null) sind dieselben wie bei der Zerlegung in bezug auf $f(z) = u + iv$. Die Unbestimmtheit bei den Punkten, in denen $f(z)$ den einzigen Punkt $\zeta = \infty$ als Randwertbereich hat, fällt nicht ins Gewicht, da diese Punkte nach Satz II nur in einer Menge vom Maße Null auftreten. Es ist noch zu bemerken, daß zunächst nur folgt, daß auf C_2 die Häufungsbereiche $H_a(P)$ von $u(x, y)$ aus der nicht abgeschlossenen reellen Achse $-\infty < u < \infty$ bestehen; die Abgeschlossenheit der $H_a(P)$ zieht aber von selbst nach sich, daß sie dann auch die Punkte $+\infty$ und $-\infty$ enthalten. Der Satz II ergibt noch:

Satz IV. Sind die Voraussetzungen des Satzes III erfüllt, so bildet die Gesamtheit aller Punkte erster Art von C (in bezug auf $u(x, y)$), die als Randwertbereich $+\infty$ bzw. $-\infty$ haben, eine Menge vom Maße Null.

Für die im Endlichen gelegenen Punkte gilt der Satz nicht.

§ 3.

Es sei $f(\theta)$ eine im *Denjoy-Perron*schen Sinne integrierbare Funktion mit der Periode 2π. Da $f(\theta)$ fast überall die Ableitung ihres unbestimmten Integrals ist, so ist die Potentialfunktion

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - r^2)\, f(t)\, dt}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - t)}, \qquad z = x + iy = re^{\varphi i}$$

[11]) Daß bei einer regulären Potentialfunktion den Mengen erster Art wieder Mengen erster Art der konjugierten Potentialfunktion entsprechen, ist schon bei *Priwaloff* loc. cit.[5]) bewiesen.

nach *Fatou*[12]) von der ersten Art auf dem Einheitskreis, dies gilt nach Satz III auch von der konjugierten Potentialfunktion $v(r, \theta)$, und eine früher von mir bewiesene Beziehung[13]) (vgl. auch Satz IV) *ergibt dann die Integrierbarkeit (im Denjoy-Perronschen Sinne) von*

$$\frac{f(\theta + t) - f(\theta - t)}{t}$$

als Funktion von t, auch in der Umgebung des Nullpunktes, wenn man von einer θ-Menge vom Maße Null absieht. Ebenso ergibt ein anderer Satz[14]) folgendes Resultat: *Ist $f(\theta)$ auf einer meßbaren Menge A vom positiven Maß fast überall differenzierbar*[15]), *so existiert fast überall auf A*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{a} \frac{f(\theta + t) + f(\theta - t) - 2 f(\theta)}{t^2} \, dt.$$

Insbesondere existiert also das letzte Integral für fast alle θ, wenn $f(\theta)$ von verallgemeinerter beschränkter Variation[16]) ist. Diese Ergebnisse sind Spezialfälle eines allgemeineren Satzes, zu dessen Formulierung wir noch den Begriff einer verallgemeinerten höheren Ableitung[17]) bedürfen. Es sei

$$f(\theta + t) = a_0 + a_1 t + \frac{a_2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{a_{r-1}}{(r-1)!} t^{r-1} + \frac{t^r}{r!} \omega_r(\theta, t).$$

Ist $\lim_{t \to 0} \omega_r(\theta, t) = a_r$ vorhanden, so sagen wir, $f(\theta)$ besitze im Punkte θ die r-te verallgemeinerte Ableitung a_r (in diesem Sinne sind auch $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}$ die erste, zweite, . . ., $(r-1)$-te Ableitung). Mit diesen Bezeichnungen lautet der oben erwähnte Satz:

Satz V. Besitzt $f(\theta)$[15]) *fast überall auf einer meßbaren θ-Menge A von positivem Maß eine r-te verallgemeinerte Ableitung, so existiert auf A abgesehen von einer θ-Menge vom Maße Null der Grenzwert*[18])

---

[12]) *Fatou* loc. cit.[6]) S. 363 die dort über $f(\theta)$ gemachten einschränkenden Voraussetzungen sind für den Beweis unwesentlich. Vgl. auch S. 357 und den von *Carathéodory* herrührenden Beweis von *Study-Blaschke*, Konforme Abbildung einfach-zusammenhängender Bereiche (1913), S. 50.

[13]) *Plessner*, Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen, Diss. Gießen (1922), Mitt. d. math. Semin. d. Univ. Gießen, H. 10, S. 4, Satz 1. Die dort gemachte Voraussetzung der L-Integrierbarkeit ist unwesentlich, da beim Beweis nur die partielle Integration und der zweite Mittelwertsatz benutzt worden sind, die auch in derselben Form für das *Denjoy-Perron*sche Integral gelten.

[14]) *Plessner*, loc. cit. S. 4, Satz 3.

[15]) Es wird außerdem noch die Integrierbarkeit von $f(\theta)$ vorausgesetzt. Der zugrunde gelegte Integralbegriff ist dabei unwesentlich, kann auch als das allgemeine *Denjoy*sche Integral vorausgesetzt werden. Vom Interesse ist hier aber hauptsächlich der Fall einer im allgemeinen stetigen Funktion $f(\theta)$.

[16]) Vgl. *Lusin*, Annali di mat. pura ed appl. 1917, S. 99 (fonction à variation bornée généralisée) und *Denjoy*, Annales de l'Ecole Norm. Bd. 33 (1916), S. 163 u. 166.

[17]) Die folgende Definition ist eine wesentliche Modifikation der sonst üblichen *De la Vallée Poussin*schen Definition. Vgl. *De la Vallée Poussin*, Bull. de l'Acad. R. de Belg. 1908.

[18]) Die auftretenden Grenzwerte lassen sich auch als *Cauchy*sche Hauptwerte von

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\omega_r(\theta, t) - \omega_r(\theta, -t)}{t} \, dt.$$

Wird außerdem noch $f(\theta)$ als ein unbestimmtes Integral $f(\theta) = \int_{\cdot}^{\theta} \varphi(t)\,dt$[19]) *vorausgesetzt, so existiert fast überall auf A der Grenzwert*[18])

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\bar{\omega}_{r-1}(\theta, t) - \bar{\omega}_{r-1}(\theta, -t)}{t} \, dt\,,$$

wo die $\bar{\omega}_k$[20]) *dieselbe Bedeutung in bezug auf φ haben, wie die ω_k in bezug auf f.*

Den ausführlichen Beweis für den Satz V werde ich bei anderer Gelegenheit veröffentlichen. Hier sei nur bemerkt, daß der zweite Teil des Satzes V sich unmittelbar durch partielle Integration aus dem ersten ergibt.

$$\int_{-a}^{a} \frac{\omega_r(b, t)}{t} \, dt \quad \text{bzw.} \quad \int_{-a}^{a} \frac{\omega_{r-1}(b, t)}{t} \, dt$$

auffassen.

[19]) Der Integralbegriff kann hier auch als der allgemeine *Denjoy*sche angesehen werden.

[20]) Entsprechend ist $\bar{\alpha}_k = \alpha_{k+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, r-2)$ zu setzen.

Über das Reziprozitätsgesetz der m-ten Potenzreste.

Von *Helmut Hasse* in Halle (Saale).

Inhalt.

		Seite
	Einleitung	228
§ 1.	Gesetze für das m-te Potenzrestsymbol	234
§ 2.	Beweis des Reziprozitätsgesetzes (IV)	241
§ 3.	Das m-te Normenrestsymbol für die nicht in m aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}$	242
§ 4.	Das m-te Normenrestsymbol für die in m aufgehenden Primideale $\mathfrak{l}$	249
§ 5.	Beweis der Produktformel (V)	255
	Anhang: Ergänzung zum Beweis der Übergangsregel § 1, (20)	257

Einleitung.

Herr *E. Artin* hat in einer kürzlich erschienenen Arbeit [1]) das allgemeine Reziprozitätsgesetz für einen beliebigen algebraischen Grundkörper k von endlichem Grade und einen beliebigen relativ-Abelschen Oberkörper K von endlichem Grade in der folgenden Fassung bewiesen:

(I) *Es sei* $\mathfrak{q}$ *ein nicht im Führer von* K/k *aufgehendes Primideal aus* k, *ferner* $\sigma_\mathfrak{q}$ *derjenige Automorphismus von* K/k, *für den die Kongruenz*

$$\sigma_\mathfrak{q}\Gamma \equiv \Gamma^{N_k(\mathfrak{q})} \bmod.^+ \mathfrak{q} \quad [2]) \tag{1}$$

für alle für $\mathfrak{q}$ *ganzen* Γ *aus* K *gilt.*

Dann hängt $\sigma_\mathfrak{q}$ *nur von der Idealklasse nach* K *in* k *ab, der* $\mathfrak{q}$ *angehört, und die Zuordnung* $\mathfrak{q} \longleftrightarrow \sigma_\mathfrak{q}$ *vermittelt den einstufigen Isomorphismus zwischen der Idealklassengruppe nach* K *in* k *und der Galoisschen Gruppe von* K/k.

Dabei bedeutet „Führer von K/k“ den Führer derjenigen Idealgruppe H in

---

[1]) „Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes“, Abhandl. a. d. Math. Sem. d. Hamb. Univ. V (1927), im folgenden zitiert mit A. — Außerdem wird zitiert mit H. I und H. Ia mein „Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil I und Teil Ia“, Jahresber. d. D. M.-V. **35** (1926) und **36** (1927).

[2]) Ich unterscheide die additive Kongruenz $\alpha \equiv \beta \bmod.^+ \mathfrak{m}$ und die multiplikative Kongruenz $\alpha \equiv \beta \bmod. \mathfrak{m}$. Die additive bedeutet, daß $\alpha - \beta$, die multiplikative, daß $\frac{\alpha}{\beta} - 1 = \frac{\alpha - \beta}{\beta}$ als reduzierter Idealbruch einen durch $\mathfrak{m}$ teilbaren Zähler und einen zu $\mathfrak{m}$ primen Nenner hat. (Siehe H. Ia, § 3.)

k, zu der K der Klassenkörper ist, und „Idealklassen nach K in k" die Idealklassen nach H in k [1]).

Für einen die m-ten Einheitswurzeln enthaltenden Grundkörper k leitet Herr *Artin* aus (I) leicht die folgenden beiden Fassungen des Reziprozitätsgesetzes der m-ten Potenzreste her:

(II) *Es seien a eine beliebige Zahl $\neq 0$ und $\mathfrak{b}$ ein zum Führer von $k(\sqrt[m]{a})$ [2]) primes Ideal aus k. Dann hängt das m-te Potenzrestsymbol $\left(\frac{a}{\mathfrak{b}}\right)_m$ in k nur von der Idealklasse nach $k(\sqrt[m]{a})$ [2]) ab, der $\mathfrak{b}$ angehört.*

(III) *Es seien α und β zwei zueinander und zu m prime Zahlen aus k, von denen eine m-primär ist. Dann gilt für das m-te Potenzrestsymbol in k das Reziprozitätsgesetz*

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_m = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_m .$$

Dabei bedeutet „a ist m-primär", daß der Führer von $k(\sqrt[m]{a})$ prim zu m, und a total-positiv [3]) ist, und das m-te *Potenzrestsymbol* in k ist folgendermaßen definiert:

$$\left(\frac{a}{\mathfrak{q}}\right)_m = \frac{\sigma_{\mathfrak{q}}\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{a}} \tag{2}$$

für ein nicht im Führer von $k(\sqrt[m]{a})$ aufgehendes Primideal $\mathfrak{q}$, wenn $\sigma_{\mathfrak{q}}$ die in (1) angegebene Bedeutung für $k(\sqrt[m]{a})$ hat;

$$\left(\frac{a}{\mathfrak{b}}\right)_m = \left(\frac{a}{\mathfrak{q}_1}\right)_m^{b_1} \cdots \left(\frac{a}{\mathfrak{q}_r}\right)_m^{b_r} \tag{3}$$

für ein zum Führer von $k(\sqrt[m]{a})$ primes zusammengesetztes Ideal $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_1^{b_1} \cdots \mathfrak{q}_r^{b_r}$.

Auf Grund dieser Definition, deren Beziehung zur üblichen Definitionsmethode ich des Zusammenhangs halber erst am Schluß dieser Einleitung erörtere, ist (II) eine unmittelbare Folge aus (I), während (III) aus (II) nach einer im Prinzip von Herrn *Ph. Furtwängler* [4]) herrührenden Schlußweise folgt, nämlich durch geeignete Anwendung von (II) in $k\left(\sqrt[m]{\frac{a}{\beta}}\right)$ als Grundkörper (siehe unten, § 2).

Ich leite in dieser Arbeit aus dem *Artin*schen Gesetz (II), in Verfolgung der vom Reziprozitätsgesetz der Potenzreste eines Primzahlexponenten $m = l$ geläufigen Linie, die folgenden beiden weiteren Gesetze her:

---

[1]) Siehe hierzu die Hauptsätze der *Takagi*schen Theorie des relativ-Abelschen Körpers, etwa in H. I, § 4.

[2]) Da der Grundkörper k in „$k(\sqrt[m]{a})$" schon notiert ist, werde von einer nochmaligen Angabe in der Form „Führer von $k(\sqrt[m]{a})/k$", „Idealklasse nach $k(\sqrt[m]{a})$ in k", „Galoissche Gruppe von $k^m(\sqrt[m]{a})/k$" abgesehen.

[3]) Dies kommt nur für $m = 2$ wirklich in Betracht, weil k für $m > 2$ total-imaginär ist.

[4]) „Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern", Math. Ann. 67 (1909), S. 27; „Über die Reziprozitätsgesetze für Primzahlpotenzexponenten", Crelle 157 (1926), S. 15.

(IV) *Es seien a und β zwei Zahlen aus k derart, daß die Führer von $k(\sqrt[m]{a})$ und $k(\sqrt[m]{\beta})$ zueinander prim sind*[1]*). Dann gilt für das m-te Potenzrestsymbol in k das Reziprozitätsgesetz*

$$\left(\frac{a}{\beta}\right)_m = \left(\frac{\beta}{a}\right)_m .$$

(V) *Es seien a und β zwei beliebige Zahlen $\neq 0$ aus k. Dann gilt für das m-te Normenrestsymbol in k die Produktformel*

$$\prod_{\mathfrak{w}} \left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{w}}\right)_m = 1 ,$$

in der $\mathfrak{w}$ alle Primideale und unendlichen Primstellen von k durchläuft.

Während das Gesetz (III) in der üblichen Terminologie den Typus „allgemeines Reziprozitätsgesetz“ hat, weil in ihm die Voraussetzung „a und β prim zum Exponenten m“ gemacht wird, ist das Gesetz (IV) als eine Zusammenfassung jenes Typus und des Typus „zweiter Ergänzungssatz“ [2]) anzusehen, weil in ihm a oder β Primteiler des Exponenten m enthalten können.

Der schönen Formulierung (IV) zuliebe ist die obige Definition (2), (3) des m-ten Potenzrestsymbols in k noch auf zum Führer von $k(\sqrt[m]{a})$ nur m-kernprime [3]) $\mathfrak{b}$ zu erweitern:

$$(4) \qquad \left(\frac{a}{\mathfrak{b}}\right)_m = \left(\frac{a}{\mathfrak{b}^*}\right)_m , \qquad \left\{\begin{array}{c}\text{wenn } \mathfrak{b} = \mathfrak{b}^* \mathfrak{b}_0^m \text{ mit zum} \\ \text{Führer von } k(\sqrt[m]{a}) \text{ primem } \mathfrak{b}^*\end{array}\right\} .$$

Erst auf Grund dieser Festsetzung haben die in (IV) auftretenden Symbole $\left(\frac{a}{\beta}\right)_m$ und $\left(\frac{\beta}{a}\right)_m$ für alle der dortigen Voraussetzung genügenden Paare a, β einen Sinn. Denn sind die Führer von $k(\sqrt[m]{a})$ und $k(\sqrt[m]{\beta})$ zueinander prim, und geht ein Primideal etwa im Führer von $k(\sqrt[m]{a})$ auf, so geht es nicht im m-Kern von β auf, weil es sonst auch im Führer von $k(\sqrt[m]{\beta})$ aufginge. Also besteht dann wirklich eine Darstellung $\beta = \mathfrak{b}^* \mathfrak{b}_0^m$ mit zum Führer von $k(\sqrt[m]{a})$ primem $\mathfrak{b}^*$, und entsprechend $a = \mathfrak{a}^* \mathfrak{a}_0^m$ mit zum Führer von $k(\sqrt[m]{\beta})$ primem $\mathfrak{a}^*$.

[1]) „Führer“ verstehe ich dabei im Sinne von H. I a, § 4; daher habe ich auch schon im Vorhergehenden „Führer“ statt wie in A. „Relativdiskriminante“ geschrieben, wenn das auch dort noch auf dasselbe hinauslief. — Im Führer von K/k gehen alle diejenigen unendlichen Primstellen 1-ten Grades (reellen konjugierten zu k entsprechend) auf, die in K in unendliche Primstellen 2-ten Grades (Paaren konjugiert-komplexer konjugierter zu K entsprechend) zerfallen, also sozusagen „träge“ sind (H. I a, § 6, Satz 2). Für $K = k(\sqrt[m]{a})$ geht also ein $\mathfrak{p}_\infty$ dann und nur dann nicht im Führer auf, wenn $a \equiv 1$ mod. $\mathfrak{p}_\infty$ ($a > 0$ ($\mathfrak{p}_\infty$)) ist (H. I a, § 11, Satz 9). All' dies kommt also wieder nur für $m = 2$ in Betracht (vergl. S. 229, Anm. [3]).

[2]) Der Typus „erster Ergänzungssatz“ ist nur ein Spezialfall des Typus „allgemeines Reziprozitätsgesetz“, nämlich der, daß eine der beiden Zahlen a, β eine Einheit ist.

[3]) Unter dem „m-Kern“ von $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_1^{b_1} \cdots \mathfrak{q}_r^{b_r}$ verstehe ich $\mathfrak{b}^* = \mathfrak{q}_1^{b_1^*} \cdots \mathfrak{q}_r^{b_r^*}$, wo die b_i^* die

Das Gesetz (V) hat den Typus „*Hilbert*sche Produktformel". Das in ihm auftretende m-te Normenrestsymbol in k ist ein Symbol, dessen Werte m-te Einheitswurzeln sind, und das die Eigenschaften hat:

$$(5)\qquad \left(\frac{\beta,\ a}{\mathfrak{w}}\right)_m = 1 \quad \left\{\begin{array}{l} \text{dann und nur dann, wenn zu jedem } r \geqq 1 \\ \text{eine Zahl } \mathsf{B}_r \text{ aus } K = k(\sqrt[m]{a}) \text{ existiert, so daß} \\ \qquad \beta \equiv N_{Kk}(\mathsf{B}_r) \bmod \mathfrak{w}^r \\ \text{ist (für eine unendliche Primstelle } \mathfrak{w} = \mathfrak{p}_\infty \\ \text{nur } r = 1). \end{array}\right\},$$

$$(6)\qquad \left(\frac{\beta_1\beta_2,\ a}{\mathfrak{w}}\right)_m = \left(\frac{\beta_1,\ a}{\mathfrak{w}}\right)_m \left(\frac{\beta_2,\ a}{\mathfrak{w}}\right)_m \qquad (\textit{Vorderer Zerlegungssatz}),$$

$$(7)\qquad \left(\frac{\beta,\ a_1a_2}{\mathfrak{w}}\right)_m = \left(\frac{\beta,\ a_1}{\mathfrak{w}}\right)_m \left(\frac{\beta,\ a_2}{\mathfrak{w}}\right)_m \qquad (\textit{Hinterer Zerlegungssatz}),$$

$$(8)\qquad \left(\frac{\beta,\ a}{\mathfrak{w}}\right)_m \left(\frac{a,\ \beta}{\mathfrak{w}}\right)_m = 1 \qquad (\textit{Vertauschungssatz}).$$

Durch (5) ist das Symbol nur „ohne Unterscheidung der Nichtreste" definiert. Vermutlich wird, wie im Primzahlfalle $m = l$, diese Unbestimmtheit durch Hinzunahme der Forderungen (6)—(8) bis auf einen nur von $\mathfrak{w}$, nicht von a und β abhängigen, zu m primen Exponenten $c_\mathfrak{w}$ behoben [1]). Da die Frage nach der direkten Festlegung dieses Exponenten $c_\mathfrak{w}$ für in m aufgehendes $\mathfrak{w}$ schon für $m = l$ noch nicht restlos geklärt ist [2]), definiere ich im folgenden das Symbol durch explizite Formeln, nach dem für $m = l$ bekannten Schema. Das Hauptgewicht liegt dann natürlich auf der Tatsache, daß das so definierte Symbol wirklich m-tes Normenrestsymbol ist, d. h. die Eigenschaft (5) hat. Die übrigen Eigenschaften (6)—(8), sowie die Produktformel (V) ergeben sich auf diesem Wege ohne Schwierigkeiten.

Ich erörtere nun noch den Zusammenhang der in (2), (3), (4) auf *Artin*scher Grundlage getroffenen Definition des m-ten Potenzrestsymbols in k mit der üblichen Methode zu dessen Definition, und darf mich dabei auf das in (2) definierte Symbol $\left(\frac{a}{\mathfrak{q}}\right)_m$, wo $\mathfrak{q}$ ein nicht im Führer von $k(\sqrt[m]{a})$ aufgehendes Primideal ist, beschränken.

Geht $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ nicht in m auf, und ist $\mathfrak{p}$ sogar prim zu a selbst (also wegen $(\mathfrak{p}, m) = 1$ erst recht zum Führer von $k(\sqrt[m]{a})$ [3])), so liefert die Anwendung der Defi-

kleinsten nicht-negativen Reste der b_i mod. m sind. „$\mathfrak{b}$ ist m-kernprim zu $\mathfrak{a}$" soll dann besagen, daß der m-Kern von $\mathfrak{b}$ prim zu $\mathfrak{a}$ ist.

[1]) *H. Hasse*, „Direkter Beweis des Zerlegungs- und Vertauschungssatzes für das *Hilbert*sche Normenrestsymbol in einem algebraischen Zahlkörper im Falle eines Primteilers $\mathfrak{l}$ des Relativgrades l", Crelle 154 (1924).

[2]) *H. Hasse*, „Zur Theorie des *Hilbert*schen Normenrestsymbols in algebraischen Zahlkörpern (Dritter Teil: Normierung)", Crelle 154 (1925).

[3]) H. Ia, § 11, Satz 9.

nitionskongruenz (1) für $\sigma_\mathfrak{p}$ auf $\Gamma = \sqrt[m]{a}$, daß das in (2) definierte Symbol die durch die Kongruenz

$$\left(\frac{a}{\mathfrak{p}}\right)_m \equiv a^{\frac{N_k(\mathfrak{p})-1}{m}} \bmod \mathfrak{p} \tag{9}$$

(wegen $(\mathfrak{p}, m) = 1$ und $N_k(\mathfrak{p}) \equiv 1 \bmod. m$[1]) eindeutig) bestimmte m-te Einheitswurzel ist. So wird das Symbol in der bisherigen Literatur definiert, und zwar ausschließlich unter den genannten Voraussetzungen über $\mathfrak{p}$, während darüber hinaus bisher gar keine Definition gegeben wurde.

Geht $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ nicht in m auf, und ist $\mathfrak{p}$ nur zum Führer von $k(\sqrt[m]{a})$ prim, so liefert (2) ohne weiteres die, zu (4) analoge, Reduktion

$$\left(\frac{a}{\mathfrak{p}}\right)_m = \left(\frac{a^*}{\mathfrak{p}}\right)_m, \qquad \text{wenn } a = a^* a_0^m \text{ mit zu } \mathfrak{p} \text{ primem } a^*, \tag{10}$$

auf den vorigen Fall. Denn wenn $\mathfrak{p}$ zum Führer von $k(\sqrt[m]{a})$ prim ist, geht $\mathfrak{p}$ nicht im m-Kern von a auf, so daß es derartige a^* gibt.

Geht $\mathfrak{q} = \mathfrak{l}$ in m auf, so erhebt sich die Frage nach einer zu (9) analogen Kongruenzfestlegung des Symbols $\left(\frac{a}{\mathfrak{l}}\right)_m$. Auch hier ist eine Reduktion, entsprechend zu (10), möglich. Man kann sich daher auf solche a beschränken, für die $\mathfrak{l}$ prim zu a und zum Führer von $k(\sqrt[m]{a})$ ist (das letztere folgt jetzt nicht aus dem ersteren[2])). Genau wie vorher ergibt sich aus (1) und (2) wieder die Kongruenz (9), die hier wegen $N_k(\mathfrak{l}) \equiv\!\!\equiv 1 \bmod. m$ besser in der Form

$$\left(\frac{a}{\mathfrak{l}}\right)_m \equiv \sqrt[m]{a}^{N_k(\mathfrak{l})-1} \bmod \mathfrak{l}$$

geschrieben wird. Aber diese Kongruenz legt das Symbol $\left(\frac{a}{\mathfrak{l}}\right)_m$ nicht eindeutig fest, weil die m-ten Einheitswurzeln nicht sämtlich inkongruent mod. $\mathfrak{l}$ sind.

Es ist mir bisher nur im Primzahlfalle $m = l$ gelungen, eine zu (9) analoge, eindeutige Kongruenzfestlegung des Symbols $\left(\frac{a}{\mathfrak{l}}\right)_m$ anzugeben, die an Stelle des unbestimmt gelassenen Γ in (1) eine bestimmte Zahl aus $k(\sqrt[m]{a})$ zugrunde legt.

Ist ζ_0 eine primitive l-te Einheitswurzel, $\mathfrak{l}_0 = \lambda_0 = 1 - \zeta_0$ der Primteiler von l im Körper der l-ten Einheitswurzeln, und sind $\mathfrak{l}^{e_0}$ und $\mathfrak{l}^e = \mathfrak{l}^{e_0(l-1)}$ die Beiträge von $\mathfrak{l}$ zu $\mathfrak{l}_0$ und $l = \mathfrak{l}_0^{l-1}$, so ist die Bedingung

$$a \equiv a_0^l \bmod \mathfrak{l}^{e+e_0}$$

notwendig und hinreichend dafür, daß $\mathfrak{l}$ nicht im Führer von $k(\sqrt[l]{a})$ aufgeht[3]).

[1]) H. I, § 10, Satz 19.
[2]) H. Ia, § 11, Satz 9.
[3]) H. Ia, § 11, Satz 9.

Entsprechend zu der obigen Reduktion (10) kann daher sogar

$$a \equiv 1 \bmod. \mathfrak{l}^{e+e_0}$$

vorausgesetzt werden. Es wird dann [1])

$$\sqrt[l]{a} \equiv 1 \bmod. \mathfrak{l}^{e_0},$$

und die Anwendung der Definitionskongruenz (1) für $\sigma_\mathfrak{l}$ auf die für $\mathfrak{l}$ ganze Zahl $\Gamma = \dfrac{\sqrt[l]{a}-1}{\lambda_0}$ liefert nach (2) die Kongruenz

$$\frac{\left(\frac{a}{\mathfrak{l}}\right)_l \sqrt[l]{a}-1}{\lambda_0} \equiv \left(\frac{\sqrt[l]{a}-1}{\lambda_0}\right)^{N_k(\mathfrak{l})} \bmod.^+ \mathfrak{l}, \tag{11}$$

die $\left(\frac{a}{\mathfrak{l}}\right)_l$ eindeutig festlegt, weil die l-ten Einheitswurzeln sämtlich inkongruent mod. $\mathfrak{l}^{e_0+1}$ sind.

Gegenüber (9) hat (11) den Nachteil, daß der Grundkörper k zur Festlegung des Symbols $\left(\frac{a}{\mathfrak{l}}\right)_l$ verlassen wird. Das kann aber vermieden werden. Aus

$$\sqrt[l]{a} = 1 + \Gamma\lambda_0$$

folgt durch Erheben in die l-te Potenz [1])

$$a \equiv 1 + \Gamma l\lambda_0 + \Gamma^l \lambda_0^l \equiv 1 + (\Gamma - \Gamma^l) l\lambda_0 \bmod. \mathfrak{l}^{e+e_0+1},$$

also

$$\Gamma - \Gamma^l \equiv \frac{a-1}{l\lambda_0} \bmod.^+ \mathfrak{l},$$

und daraus durch sukzessive Potenzierung mit l

$$\Gamma - \Gamma^{N_k(\mathfrak{l})} \equiv S_\mathfrak{l}\left(\frac{a-1}{l\lambda_0}\right) \bmod.^+ \mathfrak{l},$$

wenn $S_\mathfrak{l}(\gamma)$ den (rational darstellbaren) Kongruenzwert von $\gamma + \gamma^l + \cdots + \gamma^{\frac{N_k(\mathfrak{l})}{l}}$ mod.$^+$ $\mathfrak{l}$, die Spur von γ im Restklassenkörper mod.$^+$ $\mathfrak{l}$, bezeichnet. Da nun nach (11)

$$\Gamma - \Gamma^{N_k(\mathfrak{l})} \equiv \frac{1-\left(\frac{a}{\mathfrak{l}}\right)_l}{\lambda_0} \sqrt[l]{a} \equiv \frac{1-\left(\frac{a}{\mathfrak{l}}\right)_l}{\lambda_0} \bmod.^+ \mathfrak{l}$$

ist, ergibt sich zusammengenommen die eindeutige Kongruenzfestlegung

$$\left(\frac{a}{\mathfrak{l}}\right)_l \equiv 1 - \lambda_0 S_\mathfrak{l}\left(\frac{a-1}{l\lambda_0}\right) \bmod. \mathfrak{l}^{e_0-1}. \tag{12}$$

Weil $\dfrac{1-\left(\frac{a}{\mathfrak{l}}\right)_l}{\lambda_0} \equiv c_0 \bmod.^+ \mathfrak{l}$, wenn $\left(\frac{a}{\mathfrak{l}}\right)_l = \zeta_0^{c_0}$, kann man (12) schließlich auch die Form

---

[1]) H. Ia, § 15, Hilfssatz 4.

$$(13) \qquad \left(\frac{a}{\mathfrak{l}}\right)_l = \zeta_0^{s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\alpha-1}{l\lambda_0}\right)}$$

geben.

Für $l=2$ und den rationalen Körper als Grundkörper k gibt (13) den bekannten Charakter

$$\left(\frac{a}{2}\right)_2 = (-1)^{\frac{a-1}{4}} \qquad (a \equiv 1 \bmod 4).$$

Allgemein folgt aus (13) für $a \equiv 1 \bmod l\mathfrak{l}_0$ durch Zusammensetzung

$$\left(\frac{a}{l}\right)_l = \zeta_0^{\sum_{\mathfrak{l}} e_{\mathfrak{l}} s_{\mathfrak{l}}\left(\frac{a-1}{l\lambda_0}\right)},$$

wenn $l = \Pi \mathfrak{l}^{e_{\mathfrak{l}}}$ die Zerlegung von l in k ist. Der Exponent rechts ist aber der gewöhnlichen Spur $S_k\left(\frac{a-1}{l\lambda_0}\right)$ mod.$^+$ l kongruent [1]), also

$$\left(\frac{a}{l}\right)_l = \zeta_0^{S_k\left(\frac{a-1}{l\lambda_0}\right)}.$$

Das Reziprozitätsgesetz (IV) ergibt hiernach also die spezielle Tatsache vom Typus „zweiter Ergänzungssatz“:

$$\left(\frac{l}{a}\right)_l = \zeta_0^{S_k\left(\frac{a-1}{l\lambda_0}\right)}, \qquad \text{wenn } a \equiv 1 \bmod l\mathfrak{l}_0 \text{ [2])}.$$

speziell für $l=2$ und den rationalen Körper als Grundkörper k

$$\left(\frac{2}{a}\right)_2 = (-1)^{\frac{a-1}{4}}, \qquad \text{wenn } a \equiv 1 \bmod 4.$$

Da $\lambda_0^{l-1}\varepsilon = l$ mit einer Einheit ε, also $\left(\frac{a}{\lambda_0}\right)_l = \left(\frac{a}{l}\right)_l^{-1}$ ist, folgt schließlich die analoge Tatsache

$$\left(\frac{\lambda_0}{a}\right)_l = \zeta_0^{-S_k\left(\frac{a-1}{l\lambda_0}\right)}, \qquad \text{wenn } a \equiv 1 \bmod l\mathfrak{l}_0.$$

§ 1. Gesetze für das m-te Potenzrestsymbol.

Da, wie schon gesagt, das m-te Potenzrestsymbol durch (2) — (4) auf anderer Grundlage und allgemeiner definiert ist, als in der bisherigen Literatur, ist es nötig, die geläufigen Gesetze für dieses Symbol auch im Sinne dieser allgemeineren *Artin*schen Definition zu beweisen.

---

[1]) Das ergibt sich ohne Mühe aus der *Hensel*schen „Theorie der algebraischen Zahlen“ (Leipzig 1908) S. 163 und S. 112, oder auch aus der *Hilbert*schen Theorie des Galoisschen Zahlkörpers (H. Ia. § 8, (2)—(4a)), angewandt auf den durch k bestimmten Galoisschen Körper.

[2]) Diese Formel bewies ich auf anderem, komplizierterem Wege schon früher. Siehe meine Arbeit „Das allgemeine Reziprozitätsgesetz und seine Ergänzungssätze in beliebigen algebraischen Zahlkörpern für gewisse, nicht-primäre Zahlen“, Crelle **153** (1924), Formel (4 b).

Ohne weiteres aus der Definition (3), (4) folgt

$$\left(\frac{a}{\mathfrak{b}_1}\right)_m \left(\frac{a}{\mathfrak{b}_2}\right)_m = \left(\frac{a}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2}\right)_m \tag{14}$$

für zum Führer von $k(\sqrt[m]{a})$ m-kernprime $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ (also auch $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$).

Ferner hat man

$$\left(\frac{a}{\mathfrak{b}}\right)_{m'} = \left(\frac{a}{\mathfrak{b}}\right)_m^{m''}, \quad \text{wenn } m = m'm'', \tag{15}$$

für zum Führer von $k(\sqrt[m]{a})$ m-kernprimes $\mathfrak{b}$. Es genügt, das im Primidealfalle $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}$ zu beweisen. Ist $\{\sigma\}$ die Galoissche Gruppe von $k(\sqrt[m]{a})$ [1]), so ist $\{\sigma^{m'}\}$ die dem Unterkörper $k(\sqrt[m']{a})$ zugeordnete Untergruppe und die Faktorgruppe $\{\sigma\}/\{\sigma^{m'}\}$ dessen Galoissche Gruppe. Ist also $\sigma_\mathfrak{q}$ der $\mathfrak{q}$ bezgl. $k(\sqrt[m]{a})$ zugeordnete Automorphismus, so ist dessen Nebengruppe $\sigma_\mathfrak{q}\{\sigma^{m'}\}$ oder also, was wegen der Invarianz von $k(\sqrt[m']{a})$ bei $\{\sigma^{m'}\}$ auf dasselbe hinauskommt, einfach $\sigma_\mathfrak{q}$ selbst der $\mathfrak{q}$ bezgl. $k(\sqrt[m']{a})$ zugeordnete Automorphismus [2]). Daher folgt nach der Definition (2)

$$\left(\frac{a}{\mathfrak{q}}\right)_{m'} = \frac{\sigma_\mathfrak{q}\{\sigma^{m'}\}\sqrt[m']{a}}{\sqrt[m']{a}} = \frac{\sigma_\mathfrak{q}\sqrt[m']{a}}{\sqrt[m']{a}} = \frac{\sigma_\mathfrak{q}\sqrt[m]{a}^{m''}}{\sqrt[m]{a}^{m''}} = \left(\frac{\sigma_\mathfrak{q}\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{a}}\right)^{m''} = \left(\frac{a}{\mathfrak{q}}\right)_m^{m''}.$$

Aus (15) ergibt sich ohne weiteres eine Reduktion des m-ten Potenzrestsymbols auf $l_i^{n_i}$-te Potenzrestsymbole, wenn $m = \prod_{i=1}^{n} l_i^{n_i}$ die Primzahlpotenzzerlegung von m ist. Man bestimme ganze Zahlen L_i so, daß

$$\sum_{i=1}^{n} L_i \frac{m}{l_i^{n_i}} = 1$$

ist. Dann gilt

$$\left(\frac{a}{\mathfrak{b}}\right)_m = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{a}{\mathfrak{b}}\right)_{l_i^{n_i}}^{L_i} \tag{16}$$

für zum Führer von $k(\sqrt[m]{a})$ m-kernprimes $\mathfrak{b}$. Diese Formel gibt die Möglichkeit, die Definition des m-ten Potenzrestsymbols noch auf solche $\mathfrak{b}$ zu erweitern, die nur je zum Führer von $k(\sqrt[l_i^{n_i}]{a})$ $l_i^{n_i}$-kernprim sind. Man kann sogar, anknüpfend an (15), noch weitergehen, nämlich nur folgendes voraussetzen: Zu jedem Primideal $\mathfrak{q}$ existiert eine Zerlegung $m = m'm''$ so, daß $\mathfrak{b}$ m''-kernprim zu $\mathfrak{q}$ und der Führer von $k(\sqrt[m']{a})$ prim zu $\mathfrak{q}$ ist. Ich gehe aber hier der Einfachheit halber auf diese Verallgemeinerungen nicht weiter ein.

---

[1]) Vergl. S. 229, Anm. [2]).

[2]) A., S. 356.

Nicht ganz so einfach wie (14) ergibt sich die dazu inverse Regel

$$\left(\frac{a_1}{\mathfrak{b}}\right)_m \left(\frac{a_2}{\mathfrak{b}}\right)_m = \left(\frac{a_1 a_2}{\mathfrak{b}}\right)_m \tag{17}$$

für zu den Führern von $k(\sqrt[m]{a_1})$ und $k(\sqrt[m]{a_2})$ (also auch von $k(\sqrt[m]{a_1 a_2})$) m-kernprimes $\mathfrak{b}$. Es genügt wieder, das im Primidealfalle $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}$ zu beweisen. Sind $\{\sigma^{(1)}\}$ und $\{\sigma^{(2)}\}$ die Galoisschen Gruppen von $k(\sqrt[m]{a_1})$ und $k(\sqrt[m]{a_2})$, und wird festgesetzt, daß $\sqrt[m]{a_1}$ bei $\{\sigma^{(2)}\}$ und $\sqrt[m]{a_2}$ bei $\{\sigma^{(1)}\}$ invariant sein sollen, so ist die Galoissche Gruppe des Kompositums $K = k(\sqrt[m]{a_1}, \sqrt[m]{a_2})$ eine gewisse Untergruppe [1]) von $\{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}\}$. Den Unterkörpern $k(\sqrt[m]{a_1})$ und $k(\sqrt[m]{a_2})$ sind als Untergruppen zugeordnet die Durchschnitte jener Untergruppe mit $\{\sigma^{(2)}\}$ und $\{\sigma^{(1)}\}$. Ist also $\sigma_\mathfrak{q}^{(1)}\sigma_\mathfrak{q}^{(2)}$ der $\mathfrak{q}$ bezgl. K/k zugeordnete Automorphismus, so sind dessen Nebengruppen nach diesen Durchschnitten, oder also, ähnlich wie oben im Beweis von (15), einfach $\sigma_\mathfrak{q}^{(1)}$ und $\sigma_\mathfrak{q}^{(2)}$ selbst die $\mathfrak{q}$ bezgl. $k(\sqrt[m]{a_1})$ und $k(\sqrt[m]{a_2})$ zugeordneten Automorphismen. Ebenso ist $\sigma_\mathfrak{q}^{(1)}\sigma_\mathfrak{q}^{(2)}$ der $\mathfrak{q}$ bezgl. des Unterkörpers $k(\sqrt[m]{a_1 a_2})$ zugeordnete Automorphismus. Daher folgt nach der Definition (2)

$$\left(\frac{a_1 a_2}{\mathfrak{q}}\right)_m = \frac{\sigma_\mathfrak{q}^{(1)}\sigma_\mathfrak{q}^{(2)}\sqrt[m]{a_1 a_2}}{\sqrt[m]{a_1 a_2}} = \frac{\sigma_\mathfrak{q}^{(1)}\sqrt[m]{a_1}\cdot\sigma_\mathfrak{q}^{(2)}\sqrt[m]{a_2}}{\sqrt[m]{a_1}\cdot\sqrt[m]{a_2}} = \left(\frac{a_1}{\mathfrak{q}}\right)_m \left(\frac{a_2}{\mathfrak{q}}\right)_m.$$

Während nach (14) das m-te Potenzrestsymbol $\left(\frac{a}{\mathfrak{b}}\right)_m$ ein Charakter $\chi_a(\mathfrak{b})$, und zwar nach dem *Artin*schen Gesetz (II) ein erzeugender Charakter für die Idealklassengruppe nach $k(\sqrt[m]{a})$ ist, ist es nach (17) auch ein Charakter $\chi_\mathfrak{b}(a)$, legt also durch die Forderung $\left(\frac{a}{\mathfrak{b}}\right)_m = 1$ an a eine Zahlgruppe fest, deren Index ein Teiler von m ist. Im Primidealfalle $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}$ läßt sich diese Zahlgruppe, wie gezeigt werden soll, folgendermaßen angeben:

a) Geht $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ nicht in m auf, so gilt

(18 a) $\left(\frac{a}{\mathfrak{p}}\right)_m = 1$ dann und nur dann, wenn $a \equiv a_0^m \bmod \mathfrak{p}$.

b) Geht $\mathfrak{q} = \mathfrak{l}$ in m auf, so gilt

(18 b) $\left(\frac{a}{\mathfrak{l}}\right)_m = 1$ dann und nur dann, wenn $a \equiv a_0^m \bmod \mathfrak{l}^{ne+e_0+1}$.

Dabei bedeutet hier und im folgenden l die Primzahl, in der $\mathfrak{l}$ aufgeht, l^n den Beitrag von l zu m und, wie schon in der Einleitung (S. 232), ζ_0 eine primitive

[1]) Unterschiedlich zu A., S. 356 f. sind hier $k(\sqrt[m]{a_1})$ und $k(\sqrt[m]{a_2})$ nicht notwendig teilerfremd.

l-te Einheitswurzel, $\mathfrak{l}_0 = \lambda_0 = 1 - \zeta_0$ den Primteiler von l im Körper der l-ten Einheitswurzeln,

$\mathfrak{l}^{e_0}$ den Beitrag von $\mathfrak{l}$ zu $\mathfrak{l}_0$,
$\mathfrak{l}^{e} = \mathfrak{l}^{e_0(l-1)}$ den Beitrag von $\mathfrak{l}$ zu $l = \mathfrak{l}_0^{l-1}$,

also

$\mathfrak{l}^{ne+e_0+1}$ den Beitrag von $\mathfrak{l}$ zu $l^n\,\mathfrak{l}_0\mathfrak{l}$.

In Fortbildung einer im Primzahlfalle $m = l$ geläufigen Terminologie hätte man folgende Ausdrucksweise:

$$\alpha \textit{ heißt } m\textit{-primär für } \mathfrak{q}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{wenn } \mathfrak{q} \textit{ in } k(\sqrt[m]{\alpha}) \textit{ in verschiedene Primideale zerfällt (nicht-verzweigt ist)} \end{array} \right\},$$

$$\alpha \textit{ heißt } m\textit{-hyperprimär für } \mathfrak{q}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{wenn } \mathfrak{q} \textit{ in } k(\sqrt[m]{\alpha}) \textit{ in verschiedene Primideale 1-ten Relativgrades zerfällt (nicht-verzweigt und nicht-träge ist).} \end{array} \right\}.$$

„α m-primär für $\mathfrak{q}$“ ist dann gerade die Bedingung, unter der $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{q}}\right)_m$ überhaupt definiert ist, daß nämlich $\mathfrak{q}$ nicht im Führer von $k(\sqrt[m]{\alpha})$ aufgeht; „α m-hyperprimär für $\mathfrak{q}$“ nach dem *Artin*schen Gesetz (II)[1]) die Bedingung dafür, daß $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{q}}\right)_m = 1$ ist. In (18) wird also die Gruppe der für $\mathfrak{q}$ m-hyperprimären α angegeben [2]).

Zum Beweise der Tatsachen (18) ist demgemäß festzustellen, daß $x^m - \alpha$ dann und nur dann für jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{q}$ als Modul in Linearfaktoren zerfällt, d. h. daß α dann und nur dann für jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{q}$ als Modul m-ter Potenzrest ist, wenn das für die in (18) angegebene Potenz der Fall ist. Es genügt also, den folgenden Hilfssatz zu beweisen:

Hiltssatz 1. *Ist*

a) $\mathfrak{p}$ *ein in* m *nicht aufgehendes* b) $\mathfrak{l}$ *ein in* m *aufgehendes Primideal, so folgt für jedes* $r \geqq 1$ *aus*

a) $\alpha \equiv \alpha_{r-1}^m \bmod \mathfrak{p}^r$ b) $\alpha \equiv \alpha_{r-1}^m \bmod \mathfrak{l}^{ne+e_0+r}$

auch

a) $\alpha \equiv \alpha_r^m \bmod \mathfrak{p}^{r+1}$ b) $\alpha \equiv \alpha_r^m \bmod \mathfrak{l}^{ne+e_0+r+1}$

Beweis: a) Das ist klar, weil die Gruppe „$\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^{r+1}$“ in der Gruppe „$\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^r$“ den zu m primen Index $N_k(\mathfrak{p})$ hat.

b) Aus ähnlichem Grunde genügt es, b) für den Exponenten l^n. statt des vollen Exponenten m, zu beweisen. Sei demgemäß

$$\alpha = \alpha_{r-1}^{l^n}\,(1 + \gamma_r\, l^n\, \lambda_0\, \lambda^r),$$

wo λ genau durch $\mathfrak{l}^1$ teilbar und γ_r ganz für $\mathfrak{l}$ ist. Durch n-malige Potenzierung von

[1]) Es wird hier nur die triviale, von der „Nichtrestunterscheidung“ noch freie Teiltatsache dieses Gesetzes (A., S. 356 Mitte) benutzt.

[2]) Die Gruppe der für $\mathfrak{q}$ m-primären α besteht im Falle a) aus allen zu $\mathfrak{p}$ m-kernprimen α, während ihre Bestimmung im Falle b) Schwierigkeiten macht, an deren Überwindung auch die Lösung des oben a. S. 232 aufgeworfenen Problems hängt.

$$\bar{a}_r = 1 + \gamma_r \lambda_0 \lambda^r$$

mit l folgt dann [1])

$$\bar{a}_r^{l^n} \equiv 1 + \gamma_r l^n \lambda_0 \lambda^r \bmod \mathfrak{l}^{ne+e_0+r+1},$$

also wirklich

$$a \equiv a_{r-1}^{l^n} \bar{a}_r^{l^n} \equiv a_r^{l^n} \bmod \mathfrak{l}^{ne+e_0+r+1}.$$

Daß in (18a) der mod. $\mathfrak{p}$ nicht durch eine niedrigere Potenz ersetzt werden kann, ist klar. Das gleiche gilt auch für den mod. $\mathfrak{l}^{ne+e_0+1}$ in (18b). Denn wird $a = 1 + \gamma l \lambda_0$ mit zu $\mathfrak{l}$ primem γ so gewählt, daß $\left(\frac{a}{\mathfrak{l}}\right)_l \neq 1$ ist [2]), so ist nach (15), (17) auch $\left(\frac{a^{l^{n-1}L}}{\mathfrak{l}}\right)_m \neq 1$, wo $L = \frac{m}{l}$ gesetzt ist. Es ist aber, ähnlich wie vorher, $a^{l^{n-1}L} \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}^{ne+e_0}$, so daß der mod. $\mathfrak{l}^{ne+e_0}$ in (18b) nicht ausreicht. Damit ist bewiesen:

Satz 1. *Geht $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ nicht in m auf, so ist $\mathfrak{p}$ selbst, geht $\mathfrak{q} = \mathfrak{l}$ in m auf, so ist die Potenz $\mathfrak{l}^{ne+e_0+1}$ der Führer der Gruppe der für $\mathfrak{q}$ m-hyperprimären Zahlen.*

Wir folgern ferner aus Hilfssatz 1:

Satz 2. *Der Beitrag eines Primideals $\mathfrak{q}$ zum Führer irgendeines $k(\sqrt[m]{a})$ ist, falls $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ nicht in m aufgeht, höchstens $\mathfrak{p}$ selbst, falls $\mathfrak{q} = \mathfrak{l}$ in m aufgeht, höchstens die Potenz $\mathfrak{l}^{ne+e_0+1}$.*

Beweis: Sei H die Idealgruppe in k, zu der $k(\sqrt[m]{a})$ Klassenkörper ist, und

$$\mathfrak{m} = \Pi\, \mathfrak{p}^a \Pi\, \mathfrak{l}^b \Pi\, \mathfrak{p}_\infty$$

ein Erklärungsmodul für H, ferner

$$\mathfrak{m}_0 = \Pi\, \mathfrak{p} \Pi\, \mathfrak{l}^{ne+e_0+1} \Pi\, \mathfrak{p}_\infty .$$

Ist dann $\beta \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}_0$, so ist nach Hilfssatz 1 sicher $\beta \equiv \beta_0^m \bmod \mathfrak{m}$. Es gehört dann einerseits $\frac{\beta}{\beta_0^m}$ zu H, andererseits auch β_0^m, letzteres weil der Index von H ein Teiler von m ist. Somit gehört auch β zu H. Hiernach enthält H den Strahl mod. $\mathfrak{m}_0$, d. h. ist mod. $\mathfrak{m}_0$ erklärbar, also der Führer ein Teiler von $\mathfrak{m}_0$.

Ich entwickle nunmehr noch die Übergangsregeln für das m-te Potenzrestsymbol in k zu einem beliebigen Oberkörper K von endlichem Grade. Dabei gebe ich den Körper, in dem ein solches Symbol zu verstehen ist, links unten an, z. B. $_k\left(\frac{a}{\mathfrak{b}}\right)_m$.

Zunächst beweise ich den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 2. *Es seien $\bar{k}$ und K algebraische Körper von endlichem Grade über k und $\overline{K} = (\bar{k}, K)$ ihr Kompositum. Ferner sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal aus k und $\mathfrak{Q}$ ein Primteiler von $\mathfrak{q}$ in K.*

[1]) H. I a, § 15, Hilfssatz 4.

[2]) d. h. $S_l(\gamma) \not\equiv 0 \bmod^+ \mathfrak{l}$ (siehe oben S. 234, (13)).

Wenn dann $\mathfrak{q}$ *in* $\bar{k}$ $\left\{\begin{array}{l}1.)\ \textit{nicht verzweigt und nicht-träge}\\ 2.)\ \textit{nicht-verzweigt}\end{array}\right\}$ *ist, so gilt dasselbe für* $\mathfrak{Q}$ *in* $\bar{K}$.

Beweis: 1.) Dafür, daß $\mathfrak{q}$ in $\bar{k}$ nicht-verzweigt und nicht-träge ist, ist notwendig und hinreichend, daß eine Grundgleichung für $\bar{k}/k$ für jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{q}$ als Modul in Linearfaktoren aus k zerfällt, und entsprechend für $\mathfrak{Q}$ in $\bar{K}$.

2.) Dafür, daß $\mathfrak{q}$ in $\bar{k}$ nicht-verzweigt ist, ist notwendig und hinreichend, daß eine Grungleichung für $\bar{k}/k$ nach Adjunktion einer geeignet hohen $(N_k(\mathfrak{q})^f-1)$-ten Einheitswurzel ω zu k für jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{q}$ als Modul in Linearfaktoren aus $k(\omega)$ zerfällt [1]), und entsprechend für $\mathfrak{Q}$ in $\bar{K}$.

Da nun eine Grundgleichung für $\bar{k}/k$ auch Grundgleichung für $\bar{K}/K$ ist, ergeben sich die Behauptungen ohne Schwierigkeiten.

Aus Hilfssatz 2 ergibt sich, wenn man in ihm $\bar{k}=k(\sqrt[m]{a})$, $\bar{K}=K(\sqrt[m]{a})$ nimmt, sofort:

Satz 3. *Ist* a $\left\{\begin{array}{l}1.)\ m\textit{-hyperprimär}\\ 2.)\ m\textit{-primär}\end{array}\right\}$ *für ein Primideal* $\mathfrak{q}$ *aus* k, *so gilt dasselbe auch für jeden Primteiler* $\mathfrak{Q}$ *von* $\mathfrak{q}$ *in* K.

Ich beweise nun die folgende Übergangsregel:

$$(19)\qquad {}_K\Big(\frac{a}{\mathfrak{B}}\Big)_m = {}_k\Big(\frac{a}{N_{Kk}(\mathfrak{B})}\Big)_m,$$

wenn $\mathfrak{B}$ m-kernprim in K zum Führer von $k(\sqrt[m]{a})$ ist.

Da nach Hilfssatz 2 der Führer von $K(\sqrt[m]{a})$ nur Primteiler des Führers von $k(\sqrt[m]{a})$ enthält, ist dann das Symbol linkerhand definiert, und da der m-Kern von $N_{Kk}(\mathfrak{B})$ in k Teiler der Relativnorm des m-Kerns von $\mathfrak{B}$ in K ist, auch das Symbol rechterhand. Es genügt, (19) im Primidealfalle $\mathfrak{B}=\mathfrak{Q}$, $N_{Kk}(\mathfrak{B})=\mathfrak{q}^f$ zu beweisen. Die Voraussetzung lautet dann, daß $\mathfrak{Q}$ nicht im Führer von $k(\sqrt[m]{a})$ aufgeht. Daraus folgt nicht nur, wie eben festgestellt, daß die Symbole ${}_k\Big(\frac{a}{\mathfrak{Q}}\Big)_m$ und ${}_k\Big(\frac{a}{N_{Kk}(\mathfrak{Q})}\Big)_m = {}_k\Big(\frac{a}{\mathfrak{q}^f}\Big)_m$ definiert sind, sondern auch das Symbol ${}_k\Big(\frac{a}{\mathfrak{q}}\Big)_m$. Denn auch $\mathfrak{q}$ kann dann nicht im Führer von $k(\sqrt[m]{a})$ aufgehen.

Die Galoissche Gruppe von $K(\sqrt[m]{a})$ ist zu einer Untergruppe der Galoisschen Gruppe von $k(\sqrt[m]{a})$ einstufig isomorph, indem die Automorphismen $K(\sqrt[m]{a})$ gewisse Automorphismen von $k(\sqrt[m]{a})$ induzieren (nämlich diejenigen, bei denen der Durchschnitt $[k(\sqrt[m]{a}), K]$ invariant bleibt). Für in solcher Weise zugeordnete Automor-

[1]) Vergl. S. 234, Anm. [1]).

phismen werde das gleiche Zeichen verwandt. Ist dann $\sigma_{\mathfrak{Q}}$ der $\mathfrak{Q}$ bezgl. $K(\sqrt[m]{a})$ zugeordnete Automorphismus, d. h.

$$\sigma_{\mathfrak{Q}}\,\overline{\Gamma} \equiv \overline{\Gamma}^{N_k(\mathfrak{Q})} \bmod.^{+} \mathfrak{Q}$$

für alle für $\mathfrak{Q}$ ganzen $\overline{\Gamma}$ aus $K(\sqrt[m]{a})$, so resultiert durch Anwendung dieser Kongruenz auf für $\mathfrak{q}$ ganze Γ aus $k(\sqrt[m]{a})$ die Kongruenz

$$\sigma_{\mathfrak{Q}}\,\Gamma \equiv \Gamma^{N_k(\mathfrak{q})^f} \bmod.^{+} \mathfrak{q}.$$

Hiernach hängt $\sigma_{\mathfrak{Q}}$ mit dem $\mathfrak{q}$ bezgl. $k(\sqrt[m]{a})$ zugeordneten Automorphismus $\sigma_{\mathfrak{q}}$ durch die Relation $\sigma_{\mathfrak{Q}} = \sigma_{\mathfrak{q}}^{f}$ zusammen. Daher ist nach der Definition (2)

$$\left(\frac{a}{\mathfrak{Q}}\right)_m = \frac{\sigma_{\mathfrak{Q}}\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \frac{\sigma_{\mathfrak{q}}^{f}\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \left(\frac{a}{\mathfrak{q}}\right)_m^{f} = \left(\frac{a}{\mathfrak{q}^f}\right)_m = \left(\frac{a}{N_{Kk}(\mathfrak{q})}\right)_m.$$

Die zu (19) inverse Übergangsregel lautet:

$$\left(\frac{\mathsf{A}}{\mathfrak{b}}\right)_m = \left(\frac{N_{Kk}(\mathsf{A})}{\mathfrak{b}}\right)_m, \tag{20}$$

wenn das Ideal $\mathfrak{b}$ m-kernprim in k zum Führer von $K(\sqrt[m]{\mathsf{A}})$ ist.

Da $\mathfrak{b}$ dann erst recht m-kernprim in K zum Führer von $K(\sqrt[m]{\mathsf{A}})$ ist, ist jedenfalls das Symbol linkerhand definiert. Zur Feststellung, daß auch das Symbol rechterhand definiert ist und die Relation (20) gilt, genügt es, den Primidealfall $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}$ zu betrachten. Die Voraussetzung lautet dann, daß $\mathfrak{q}$ prim zum Führer von $K(\sqrt[m]{\mathsf{A}})$ ist, und $\left(\frac{\mathsf{A}}{\mathfrak{q}}\right)_m$ ist definiert. Es ist wohl möglich, wenn auch nicht ganz einfach, das Definiertsein auch des Symbols $\left(\frac{N_{Kk}(\mathsf{A})}{\mathfrak{q}}\right)_m$ und die Relation (20) im allgemeinen *Artin*schen Sinne auf analogem Wege, wie vorher den Hilfssatz 2 und die Relation (19) direkt zu beweisen. Da aber (20) im folgenden nur für den Fall eines zu m primen $\mathfrak{b}$ gebraucht wird, gehe ich darauf nicht näher ein.

Dann ist also nur der Fall eines in m nicht aufgehenden $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ zu betrachten. Wird in diesem Falle $\mathsf{A} = \mathsf{A}^*\,\mathsf{A}_0^m$ mit zu $\mathfrak{p}$ primem A^* gesetzt, so ist $N_{Kk}(\mathsf{A}) = N_{Kk}(\mathsf{A}^*)\,N_{Kk}(\mathsf{A}_0)^m$ mit zu $\mathfrak{p}$ primem $N_{Kk}(\mathsf{A}^*)$. Daher ist dann $\left(\frac{N_{Kk}(\mathsf{A})}{\mathfrak{p}}\right)_m$ definiert. Ferner darf hiernach ohne Einschränkung sogar A selbst prim zu $\mathfrak{p}$ angenommen werden. Die Richtigkeit der Relation

$$\left(\frac{\mathsf{A}}{\mathfrak{p}}\right)_m = \left(\frac{N_{Kk}(\mathsf{A})}{\mathfrak{p}}\right)_m$$

und damit die Richtigkeit von (20) im Falle eines zu m primem $\mathfrak{b}$ folgt dann genau wie im Primzahlfalle $m = l$ [1]).

[1]) Siehe den — von der Primzahleigenschaft von l unabhängigen — Beweis etwa in meiner Arbeit: „Über das allgemeine Reziprozitätsgesetz der l-ten Potenzreste im Körper k_ζ der l-ten Ein-

Den Fall eines in m aufgehenden $\mathfrak{q} = \mathfrak{l}$ werde ich auf Grund des eben geführten Nachweises mit den späteren Hilfsmitteln nachholen können und dadurch dann (20) allgemein beweisen (siehe unten: Anhang).

§ 2. Beweis des Reziprozitätsgesetzes (IV).

Der Beweis wird mittels der schon oben (S. 229) erwähnten *Furtwängler*schen Schlußweise erbracht, nämlich durch geeignete Anwendung des *Artin*schen Gesetzes (II) in $K = k\left(\sqrt[m]{\frac{a}{\beta}}\right)$.

Sind die Führer von $k(\sqrt[m]{\alpha})$ und $k(\sqrt[m]{\beta})$ zueinander prim, und sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die (nur aus Primteiler jener Führer bestehenden) m-Kerne von α und β, so ist

$$\alpha = \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_0^m, \qquad \beta = \mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_0^m,$$

wobei

$$\mathfrak{a} \text{ und } \mathfrak{b} \text{ prim zueinander.}$$

$\mathfrak{a}$ prim zum Führer von $k(\sqrt[m]{\beta})$, $\mathfrak{b}$ prim zum Führer von $k(\sqrt[m]{\alpha})$.

Wählt man dann $\mathfrak{a}_0^*$ und $\mathfrak{b}_0^*$ in den absoluten Idealklassen von $\mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{b}_0$ so, daß

$$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0^*\alpha_0, \qquad \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}_0^*\beta_0,$$

wobei

$$\mathfrak{a}_0^* \text{ und } \mathfrak{b}_0^* \text{ prim zueinander,}$$

$\mathfrak{a}_0^*$ prim zum Führer von $k(\sqrt[m]{\beta})$, (also insbesondere zu $\mathfrak{b}$) $\mathfrak{b}_0^*$ prim zum Führer von $k(\sqrt[m]{\alpha})$ (also insbesondere zu $\mathfrak{a}$).

und bestimmt α^* und β^* aus

$$\alpha = \alpha^*\alpha_0^m, \qquad \beta = \beta^*\beta_0^m,$$

also

$$\alpha^* = \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_0^{*m}, \qquad \beta^* = \mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_0^{*m},$$

so erfüllen die mit α und β gleichberechtigten α^* und β^* die folgenden Bedingungen:

$$\alpha^* \text{ und } \beta^* \text{ prim zueinander}$$

α^* prim zum Führer von $k(\sqrt[m]{\beta^*})$, β^* prim zum Führer von $k(\sqrt[m]{\alpha^*})$.

Es kann daher ohne Einschränkung angenommen werden, daß schon α und β den entsprechenden Bedingungen genügen.

Ist nun $[\mathfrak{Q}]$ der Beitrag der Primteiler $\mathfrak{Q}$ in K eines Primideals $\mathfrak{q}$ aus k zu $\sqrt[m]{\frac{a}{\beta}}$, so ist $[\mathfrak{Q}]^m$ der Beitrag von $\mathfrak{q}$ zu $\frac{a}{\beta}$. Weil nach der eben eingeführten Annahme α und β prim zueinander sind, ist daher der Beitrag von $\mathfrak{q}$ zu α oder β eine m-te Potenz in K, also

$$\alpha = \mathfrak{A}^m, \qquad \beta = \mathfrak{B}^m$$

---

heitswurzeln und in Oberkörpern von k_ζ, Crelle 154 (1925), oder bei *T. Takagi*, „Über das Reziprozitätsgesetz in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper", Journ. of the Coll. of. Science. Tokyo, 44 (5) (1920), § 2, Satz 6.

mit zueinander primen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus K. Da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ hiernach bei den Automorphismen von K/k invariant sind, ist überdies auch

$$\alpha = N_{Kk}(\mathfrak{A})^{m''}, \qquad \beta = N_{Kk}(\mathfrak{B})^{m''},$$

wenn m' der Grad von K/k und $m = m'm''$ ist. Hieraus ergibt sich nach (19) die Transformation

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_m = \left(\frac{\alpha}{N_{Kk}(\mathfrak{B})}\right)_m^{m''} = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{B}}\right)_m^{m''} = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{B}}\right)_{m'}$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_m = \left(\frac{\beta}{N_{Kk}(\mathfrak{A})}\right)_m^{m''} = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{A}}\right)_m^{m''} = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{A}}\right)_{m'}$$

der zu betrachtenden Symbole aus k in Symbole aus K, der zufolge sich die Behauptung auf den Nachweis von

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{B}}\right)_m = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{A}}\right)_m$$

(oder sogar nur mit m' statt m) reduziert. Die Regel (19) ist in der Tat anwendbar, weil nach der oben eingeführten Annahme β, also $\mathfrak{B}$, sogar prim zum Führer von $k(\sqrt[m]{\alpha})$ und α, also $\mathfrak{A}$, sogar prim zum Führer von $k(\sqrt[m]{\beta})$ ist.

Nun sind α und β wegen $\alpha = \left(\sqrt[m]{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^m \beta$ in K gleichberechtigt; insbesondere ist also $K(\sqrt[m]{\alpha}) = K(\sqrt[m]{\beta})$. Ferner sind nach § 1, Satz 3 die Führer von $K(\sqrt[m]{\alpha})$ und $K(\sqrt[m]{\beta})$ je nur aus Primteilern der Führer von $k(\sqrt[m]{\alpha})$ und $k(\sqrt[m]{\beta})$ zusammengesetzt [1]). Einerseits sind also jene Führer einander gleich, andererseits nach der Voraussetzung prim zueinander. Somit hat $K(\sqrt[m]{\alpha}) = K(\sqrt[m]{\beta})$ den Führer 1. Es gehören daher alle Hauptideale zur Hauptklasse und wegen $\mathfrak{A} = \sqrt[m]{\frac{\alpha}{\beta}}\,\mathfrak{B}$ folglich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zur gleichen Klasse nach $K(\sqrt[m]{\alpha}) = K(\sqrt[m]{\beta})$. Hieraus und aus $\alpha = \left(\sqrt[m]{\frac{\alpha}{\beta}}\right)\beta$ ergibt sich die zu beweisende Gleichheit der Symbole $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{B}}\right)_m$ und $\left(\frac{\beta}{\mathfrak{A}}\right)_m$ nach dem *Artin*schen Gesetz (II).

§ 3. Das m-te Normenrestsymbol für die nicht in m aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}$.

Es sei π eine genau durch $\mathfrak{p}^1$ teilbare Zahl und ϱ eine primitive Wurzel mod. $\mathfrak{p}$. Dann bilden π, ϱ eine Basis für die volle [2]) Restklassengruppe mod. $\mathfrak{p}$. Jedes $\alpha \neq 0$ besitzt nämlich eine Darstellung

$$\alpha \equiv \pi^a \varrho^{a'} \bmod \mathfrak{p}$$

[1]) Das bezieht sich (im Falle $m = 2$) auch auf die unendlichen Primstellen; denn Satz 3, Fall 1) gilt ersichtlich auch für diese. Anders gesagt: Ist α positiv für eine unendliche Primstelle 1-ten Grades $\mathfrak{p}_\infty$ von k so ist α auch positiv für alle in $\mathfrak{p}_\infty$ aufgehenden unendlichen Primstellen 1-ten Grades $\mathfrak{P}_\infty$ von K.

[2]) Im Sinne von H. I a, § 3, also multiplikative Kongruenz mod. $\mathfrak{p}$ in der Gruppe aller Zahlen $\neq 0$ aus k.

mit eindeutig bestimmtem a, der Ordnungszahl von a für $\mathfrak{p}$, und mod.$^+$ $(N_k(\mathfrak{p})-1)$ eindeutig bestimmtem a'.

Sind demgemäß

$$\alpha \equiv \pi^a \varrho^{a'} \bmod \mathfrak{p} \tag{21}$$
$$\beta \equiv \pi^b \varrho^{b'} \bmod \mathfrak{p}$$

die Basisdarstellungen irgendzweier Zahlen $\not\equiv 0$, so definiere ich das m-te Normenrestsymbol $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m$ durch die Formel:

$$\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)_m^{L_m\left(\begin{smallmatrix} a & a' \\ b & b' \end{smallmatrix}\right)}, \tag{22}$$

$$\text{wo } L_m\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} - \frac{(m-1)(N_k(\mathfrak{p})-1)}{2} ab \bmod.^+ m.$$

Diese Definition ist wegen $N_k(\mathfrak{p}) - 1 \equiv 0 \bmod.^+ m$ eindeutig, d. h. von der Wahl der Exponenten a' und b' innerhalb ihrer Restklassen mod.$^+(N_k(\mathfrak{p})-1)$ unabhängig. Ferner ist sie von der Wahl der Basis π, ϱ unabhängig. Ist nämlich $\overline{\pi}$, $\overline{\varrho}$ eine andere Basis derselben Art, so besteht eine Transformation

$$\pi \equiv \overline{\pi}\,\overline{\varrho}^x \bmod \mathfrak{p}$$
$$\varrho \equiv \overline{\varrho}^{x'} \bmod \mathfrak{p} \quad (x' \text{ prim zu } N_k(\mathfrak{p})-1, \text{ also zu } m),$$

der zufolge die Basisdarstellungen (21) in

$$\alpha \equiv \overline{\pi}^a \overline{\varrho}^{ax+a'x'} \bmod \mathfrak{p}$$
$$\beta \equiv \overline{\pi}^b \overline{\varrho}^{bx+b'x'} \bmod \mathfrak{p}$$

übergehen. Hieraus folgt ohne weiteres

$$L_m\begin{pmatrix} a & ax+a'x' \\ b & bx+b'x' \end{pmatrix} \equiv x' L_m\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} \bmod.^+ (N^k(\mathfrak{p})-1), \text{ also } \bmod.^+ m,$$

während

$$\left(\frac{\overline{\varrho}}{\mathfrak{p}}\right)_m^{x'} = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)_m$$

ist. Da x' prim zu m ist, ergibt sich die behauptete Invarianz.

Daß für $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m$ die in der Einleitung (S. 231) angegebenen beiden Zerlegungssätze (6), (7) gelten, ist ohne weiteres ersichtlich, ebenso auch der Vertauschungssatz (8), wenn man beachtet, daß das Zusatzglied $\frac{(m-1)(N_k(\mathfrak{p})-1)}{2} ab$ in $L_m\left(\begin{smallmatrix} a & a' \\ b & b' \end{smallmatrix}\right)$ nur für gerades m und dann nur sein Kongruenzwert mod.$^+2$ mitspricht, so daß sein Vorzeichen gleichgültig ist. Unter Beachtung dieser Tatsache sieht man auch leicht die zu § 1, (15) analoge Formel ein:

$$\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m^{m''} = \left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_{m'}, \text{ wenn } m = m'm''. \tag{23}$$

Denn, was die noch fraglichen Zusatzglieder betrifft, kommt es dazu nur auf die Kongruenz $m''(m-1) \equiv m''(m'-1) \bmod.^+ 2$ an, die mit $m(m''-1) \equiv 0 \bmod.^+ 2$ gleichbedeutend und daher stets erfüllt ist, weil für ungerades m auch m'' ungerade ist.

Daß schließlich $\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{p}}\right)_m$ auch die Eigenschaft (5) hat, also wirklich m-tes Normenrestsymbol für $\mathfrak{p}$ ist, wird in den folgenden beiden Sätzen bewiesen.

Satz 4. *Ist* $\beta \equiv N_{Kk}(\mathsf{B}) \bmod. \mathfrak{p}$ *mit* B *aus* $K = k(\sqrt[m]{a})$, *so ist* $\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{p}}\right)_m = 1$.

Beweis: Ich führe den Beweis in drei Schritten, vom einfachsten zum allgemeinsten Fall aufsteigend. Für jede Zerlegung $m = m'm''$ werde dabei $K_{m'} = k(\sqrt[m']{a})$ gesetzt [1]), und unter $\mathfrak{P}_{m'}$ einer der Primteiler von $\mathfrak{p}$ in $K_{m'}$ verstanden. Ferner sei an den Bezeichnungen in (21) festgehalten.

1.) Es sei K/k vom Grade m. Der Zerlegungs- und der Trägheitskörper zu $\mathfrak{p}$ für K/k seien k.

Dann ist

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^m, \qquad N_{Kk}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p},$$

so daß ϱ seine Bedeutung für $\mathfrak{P}$ beibehält. Nach (21) hat B die Ordnungszahl b und $\sqrt[m]{a}$ die Ordnungszahl a in $\mathfrak{P}$. Somit besteht eine Darstellung

$$\mathsf{B}^a \equiv \sqrt[m]{a}^b \varrho^{b_0'} \bmod. \mathfrak{P},$$

aus der durch Relativnormbildung nach k folgt

$$\beta^a \equiv \zeta_m^{\frac{m(m-1)}{2} b} a^b \varrho^{m b_0'} \bmod. \mathfrak{p}.$$

Dabei ist ζ_m eine beliebige primitive m-te Einheitswurzel. Da auch

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)_m \equiv \varrho^{\frac{N_k(\mathfrak{p})-1}{m}} \bmod. \mathfrak{p}$$

eine solche und a unter der Voraussetzung 1.) prim zu m ist, kann

$$\zeta_m = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)_m^a \equiv \varrho^{\frac{N_k(\mathfrak{p})-1}{m} a} \bmod. \mathfrak{p}$$

genommen werden. Der Vergleich der Exponenten von ϱ in der erhaltenen Kongruenz liefert dann nach (21)

$$ab' = a'b + \frac{(m-1)(N_k(\mathfrak{p})-1)}{2} ab \bmod.^+ m,$$

also

$$L_m \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} \equiv 0 \bmod.^+ m,$$

und damit die Behauptung $\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{p}}\right)_m = 1$ nach der Definition (22).

2.) Es sei K/k vom Grade m. Der Zerlegungskörper zu $\mathfrak{p}$ für K/k sei k.

Ist dann $K_{m'}$ der Trägheitskörper zu $\mathfrak{p}$ für K/k, so ist

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_{m'}, \qquad N_{K_{m'}k}(\mathfrak{P}_{m'}) = \mathfrak{p}^{m'},$$

[1]) Für K selbst lasse ich den Index m der Einfachheit halber fort.

so daß π seine Bedeutung für $\mathfrak{P}_{m'}$ beibehält, und ϱ aus einer primitiven Wurzel $\mathsf{P}_{m'}$ mod. $\mathfrak{P}_{m'}$ durch Relativnormbildung erhalten wird

$$\varrho \equiv N_{K_{m'}k}(\mathsf{P}_{m'}) \bmod \mathfrak{p}.$$

Wird noch $\mathsf{B}_{m'} = N_{KK_{m'}}(\mathsf{B})$, also $\beta \equiv N_{K_{m'}k}(\mathsf{B}_{m'}) \bmod \mathfrak{p}$ gesetzt, so bestehen somit Darstellungen

$$\sqrt[m']{a} \equiv \pi^{a_0}\, \mathsf{P}_{m'}^{\bar{a}'} \bmod \mathfrak{P}_{m'}$$
$$\mathsf{B}_{m'} \equiv \pi^{b_0}\, \mathsf{P}_{m'}^{\bar{b}'} \bmod \mathfrak{P}_{m'},$$

aus denen durch Relativnormbildung nach k — bei der ersten ähnlich wie unter 1.) — und Vergleich der Exponenten mit (21) folgt

$$a = a_0 m', \quad a' \equiv \bar{a}' - \frac{(m'-1)(N_k(\mathfrak{p})-1)}{2} \bmod.^+ m$$
$$b = b_0 m', \quad b' \equiv \bar{b}' \bmod.^+ m.$$

Daraus ergibt sich für den zu untersuchenden Exponenten von $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m$ die Umrechnung

$$L_m\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} \equiv m' \begin{vmatrix} a_0 & \bar{a}' \\ b_0 & \bar{b}' \end{vmatrix}$$
$$- m' \frac{(m-1)(N_k(\mathfrak{p})-1)}{2} a b_0 + m' \frac{(m'-1)(N_k(\mathfrak{p})-1)}{2} b_0 \bmod.^+ m.$$

Wir vergleichen mit dem Exponenten von $\left(\frac{\mathsf{B}_{m'},\ \sqrt[m']{a}}{\mathfrak{P}_{m'}}\right)_{m''}$, der sich wegen

$$\frac{N_{K_{m'}}(\mathfrak{P}_{m'})-1}{2} = \frac{N_k(\mathfrak{p})^{m'}-1}{2} \equiv m' \frac{N_k(\mathfrak{p})-1}{2} \bmod.^+ m$$

in der Form

$$L_{m''}\begin{pmatrix} a_0 & \bar{a}' \\ b_0 & \bar{b}' \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_0 & \bar{a}' \\ b_0 & \bar{b}' \end{vmatrix} - m' \frac{(m''-1)(N_k(\mathfrak{p})-1)}{2} a_0 b_0 \bmod.^+ m''$$

darstellt. Der Vergleich ergibt

$$L_m\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} \equiv m' L_{m''}\begin{pmatrix} a_0 & \bar{a}' \\ b_0 & \bar{b}' \end{pmatrix} \bmod.^+ m.$$

Denn die noch fraglichen Zusatzglieder sprechen nur für gerades m und dann nur ihre Kongruenzwerte mod.$^+$ 2 mit. Ist dann auch m' gerade, so können sie also in L_m und in $L_{m''}$ weggelassen werden. Ist aber m' ungerade, so kommt es (nach Weglassung des dann überflüssigen zweiten Zusatzgliedes in L_m) auf die Richtigkeit der Kongruenz

$$(m-1) a b_0 \equiv m'(m''-1) a_0 b_0 \bmod.^+ 2$$

an, die dann wegen $m = m'm'' \equiv m'' \bmod.^+ 2$ und $a = m' a_0$ in der Tat besteht.

Die Formeln (15) und (20) des § 1 ergeben jetzt die Transformation

$$\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)_m^{L_m\left(\begin{smallmatrix} a & a' \\ b & b' \end{smallmatrix}\right)} = \left(\frac{\mathsf{P}_{m'}}{\mathfrak{P}_{m'}}\right)_m^{m' L_{m''}\left(\begin{smallmatrix} a_0 & \bar{a}' \\ b_0 & \bar{b}' \end{smallmatrix}\right)} = \left(\frac{\mathsf{P}_{m'}}{\mathfrak{P}_{m'}}\right)_{m''}^{L_{m''}\left(\begin{smallmatrix} a_0 & \bar{a}' \\ b_0 & \bar{b}' \end{smallmatrix}\right)} = \left(\frac{\mathsf{B}_{m'}, \sqrt[m']{a}}{\mathfrak{P}_{m'}}\right)_{m''}.$$

Hierdurch wird die Behauptung auf den Fall 1.) zurückgeführt, der ja für $K/K_{m'}$ vorliegt.

3.) Keine Einschränkung.

Ist dann $K_{m'}$ der Zerlegungskörper zu $\mathfrak{p}$ für K/k [1]), so ist

$$\mathfrak{p} = \Pi\, \mathfrak{P}_{m'}, \qquad N_{K_{m'}k}(\mathfrak{P}_{m'}) = \mathfrak{p},$$

so daß π und ϱ ihre Bedeutung für ein $\mathfrak{P}_{m'}$ beibehalten. Somit besteht eine Darstellung

$$\sqrt[m']{a} \equiv \pi^{a_0} \varrho^{a_0'} \bmod \mathfrak{P}_{m'}$$

aus der durch Potenzierung mit m' und Vergleich der Exponenten mit (21) folgt

$$a = a_0 m', \quad a' = a_0' m'.$$

Daraus — und unter Beachtung von $N_{K_{m'}}(\mathfrak{P}_{m'}) = N_k(\mathfrak{p})$ für das Zusatzglied — ergibt sich für den zu untersuchenden Exponenten von $\left(\frac{\beta,\, a}{\mathfrak{p}}\right)_m$ die Umrechnung

$$L\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} \equiv m' L_{m''} \begin{pmatrix} a_0 & a_0' \\ b & b' \end{pmatrix} \bmod^{+} m$$

in den Exponenten von $\left(\frac{\beta,\, \sqrt[m']{a}}{\mathfrak{P}_{m'}}\right)_{m''}$. Die Formeln (15) und (19) des § 1 ergeben dann die Transformation

$$\left(\frac{\beta,\, a}{\mathfrak{p}}\right)_m = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)_m^{L_m \left(\begin{smallmatrix} a & a' \\ b & b' \end{smallmatrix}\right)} = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{P}_{m'}}\right)_m^{m' L_{m''} \left(\begin{smallmatrix} a_0 & a_0' \\ b & b' \end{smallmatrix}\right)} = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{P}_{m'}}\right)_{m''}^{m' L_{m''} \left(\begin{smallmatrix} a_0 & a_0' \\ b & b' \end{smallmatrix}\right)} = \left(\frac{\beta,\, \sqrt[m']{a}}{\mathfrak{P}_{m'}}\right)_{m''}.$$

Da $N_{Kk}(\mathfrak{B}) = \prod_\sigma \sigma N_{KK_{m'}}(\mathfrak{B}) = N_{KK_{m'}}(\prod_\sigma \sigma \mathfrak{B})$ ist, wenn σ ein Repräsentantensystem der Galoisschen Gruppe von K/k nach der $K_{m'}$ entsprechenden Untergruppe durchläuft, wird hierdurch die Behauptung auf den Fall 2.) zurückgeführt, der ja für $K/K_{m'}$ vorliegt.

Zum Beweise der Umkehrung von Satz 4 dient der folgende Hilfssatz:

Hilfssatz 3. *Ist $K = k(\sqrt[m]{a})$, so ist der Index der Gruppe der Normenrestklassen mod. $\mathfrak{p}$ von K/k höchstens gleich dem Grade von K über dem Zerlegungskörper zu $\mathfrak{p}$ für K/k.*

Beweis: Ich führe den Beweis in zwei Schritten, ähnlich wie den Beweis von Satz 4. Die dort zu Beginn getroffenen Bezeichnungsfestsetzungen mögen beibehalten werden. Ferner bezeichne:

R die volle Restklassengruppe mod. $\mathfrak{p}$ in k, N die Normenrestklassengruppe mod. $\mathfrak{p}$ von K/k,

$R_{m'}$ die volle Restklassengruppe mod. $\mathfrak{P}_{m'}$ in $K_{m'}$, $N_{m'}$ die Normenrestklassengruppe mod. $\mathfrak{P}_{m'}$ von $K/K_{m'}$,

$N^{(m')}$ die Normenrestklassengruppe mod. $\mathfrak{p}$ von $K_{m'}/k$.

[1]) Dabei sei m', in Hinblick auf die Möglichkeit, daß der Grad von K/k ein echter Teiler von m ist, möglichst groß gewählt, so daß $K/K_{m'}$ den Grad m'' hat.

1.) Es sei K/k vom Grade m. Der Zerlegungskörper zu $\mathfrak{p}$ für K/k sei k.

Dann ist zu zeigen, daß der Index $(R : N) \leqq m$ ist. Im Primzahlfalle $m = l$ ist das bekanntlich richtig (sogar $(R : N) = l$) [1]). Ich setze die Richtigkeit für jeden echten Teiler von m voraus und folgere daraus die Richtigkeit für m selbst.

Nach Annahme ist für irgendeine echte Zerlegung $m = m' m''$

$$(R : N^{(m')}) \leqq m', \qquad (R_{m'} : N_{m'}) \leqq m'' .$$

Weil nun unter der Voraussetzung 1.) $\mathfrak{P}_{m'}$ der einzige Primteiler von $\mathfrak{p}$ in $K_{m'}$ ist, wird durch Relativnormbildung von $K_{m'}$ nach k die Gruppe $R_{m'}$ eindeutig und isomorph auf die Gruppe $N^{(m')}$ abgebildet, und dabei entspricht der Untergruppe $N_{m'}$ die Untergruppe N. Nach einem bekannten gruppentheoretischen Satz [2]) folgt daraus

$$(N^{(m')} : N) \leqq (R_{m'} : N_{m'}) ,$$

also wirklich

$$(R : N) = (R : N^{(m')})(N^{(m')} : N) \leqq m' m'' = m.$$

2.) Keine Einschränkung.

Ist dann $K_{m'}$ der Zerlegungskörper zu $\mathfrak{p}$ für K/k [3]), so ist

$$(R_{m'} : N_{m'}) \leqq m'' ,$$

weil ja für $K/K_{m'}$ der Fall 1.) vorliegt, und es ist zu zeigen, daß auch $(R : N) \leqq m''$ ist. Nun liefert jede Restklasse mod. $\mathfrak{P}_{m'}$ in $K_{m'}$ durch die in ihr enthaltenen Zahlen aus k eine Restklasse mod. $\mathfrak{p}$ in k. Bei dieser eindeutigen (sogar eineindeutigen) und isomorphen Abbildung der Gruppe $R_{m'}$ auf die Gruppe R entspricht der Untergruppe $N_{m'}$ jedenfalls eine Untergruppe $\bar{N}$ der Untergruppe N. Denn ist $\beta \equiv N_{KK_{m'}}(\mathsf{B})$ mod. $\mathfrak{P}_{m'}$, so kann $\mathsf{B} \equiv 1$ mod. $\mathfrak{P}'_{m'}$, für alle $\mathfrak{P}'_{m'} \neq \mathfrak{P}_{m'}$ gewählt werden, und es ist dann auch $\beta \equiv N_{Kk}(\mathsf{B})$ mod. $\mathfrak{p}$ [4]). Wie vorher folgt daraus

$$(R : N) \leqq (R : \bar{N}) \leqq (R_{m'} : N_{m'}) \leqq m'' .$$

also die Behauptung.

Satz 5. *Ist* $\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{p}}\right)_m = 1$, *so ist* $\beta \equiv N_{Kk}(\mathsf{B})$ *mod.* $\mathfrak{p}$ *mit* B *aus* $K = k(\sqrt[m]{a})$.

Beweis: Nach dem vorderen Zerlegungssatz bilden die Restklassen β mod. $\mathfrak{p}$ mit $\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{p}}\right)_m = 1$ eine Gruppe N^*. Nach Satz 4 und Hilfssatz 3 gilt

---

[1]) H. I a, § 10, Sätze 4_0, 4_1. — Dort wird nur der Index der primen Normenrestklassengruppe mod. $\mathfrak{p}$ von K/k (β und B prim zu $\mathfrak{p}$) bestimmt und — in der Ausdrucksweise des Hilfssatzes — als gleich dem Grade von K über dem Trägheitskörper zu $\mathfrak{p}$ für K/k gefunden. Unter Berücksichtigung des Wertes von $N_{Kk}(\mathfrak{P})$ ergibt sich aber daraus leicht auch der Index der vollen Normenrestklassengruppe mod. $\mathfrak{p}$ von K/k als gleich dem Grade von K über dem Zerlegungskörper zu $\mathfrak{p}$ für K/k (also in den Fällen von Satz 4_0 und Satz 4_1 beidemal gleich l).

[2]) H. I a, § 1, Hilfssatz 2 (Isomorphieprinzip).

[3]) Siehe S. 246, Anm.

[4]) Die Hinzunahme des letzten Schlusses aus dem Beweise von Satz 4, Fall 3.) würde direkt ergeben, daß sogar $\bar{N} = N$ ist. — Daß alle im Beweis des Hilfssatzes auftretenden Relationen: $\leqq$ in Wahrheit: $=$ lauten, insbesondere die Behauptung des Hilfssatzes selbst, ergibt der Beweis des folgenden Satzes 5.

$$N^* \geqq N, \text{ also } (R : N^*) \leqq (R : N) \leqq m'',$$

wenn m'' der Grad von K über dem Zerlegungskörper $K_{m'}$ zu $\mathfrak{p}$ für K/k ist. Es genügt also zu zeigen, daß $(R : N^*) \geqq m''$ ist, und da die Nebengruppen zu N^* den Werten des Symbols $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m$ einstufig isomorph entsprechen, ist hierzu nur die Existenz eines β nachzuweisen, für das $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m$ eine primitive m''-te Einheitswurzel ist.

Wie nun schon im Beweis zu Satz 4, Fall 3.) festgestellt wurde, ist bei der angegebenen Bedeutung von $K_{m'}$,

$$a = a_0 m', \quad a' = a_0' m', \quad L_m\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} \equiv m' L_{m''}\begin{pmatrix} a_0 & a_0' \\ b & b' \end{pmatrix} \text{ mod.}^+ m\,,$$

und dabei ist, der Maximaleigenschaft von $K_{m'}$ zufolge, $(a_0, a_0', m'') = 1$. Folglich hat die Bilinearform $L_{m''}\begin{pmatrix} a_0 & a_0' \\ b & b' \end{pmatrix}$ der Determinante 1 für geeignete b, b' zu m'' prime Werte, was die Behauptung nach der Definition (22) ergibt.

Durch die Sätze 4, 5 ist zunächst nur festgestellt, daß das Symbol $\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m$ m-tes Normenrestsymbol mod. $\mathfrak{p}$ ist. Daß es auch m-tes Normensymbol mod. $\mathfrak{p}^r$ für $r \to \infty$ ist, also die a. S. 231 angegebene Eigenschaft (5) hat, ergibt sich aber daraus ohne weiteres nach § 1, Hilfssatz 1.

Der Zusammenhang des eingeführten m-ten Normenrestsymbols mit dem m-ten Potenzrestsymbol und dessen Reziprozitätsgesetz ist folgender:

Satz 6. *Haben die m-Kerne von α und β höchstens Primteiler $\mathfrak{l}$ von m gemeinsam, d. h. bestehen Darstellungen*

$$\alpha = \mathfrak{a} \cdot \Pi \mathfrak{l}^a, \quad \beta = \mathfrak{b} \cdot \Pi \mathfrak{l}^b,$$

in denen die m-Kerne von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ prim zu m und zueinander sind, so ist

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{a}}\right)_m : \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right)_m,$$

wo $\mathfrak{p}$ alle nicht in m aufgehenden Primideale durchläuft.

Beweis: Es seien $\mathfrak{p}_1$ die m-Kernprimteiler von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}_2$ die m-Kernprimteiler von $\mathfrak{b}$, also

$$\mathfrak{a} = \Pi \mathfrak{p}_1^{a_1} \cdot \mathfrak{a}_0^m, \qquad \mathfrak{b} = \Pi \mathfrak{p}_2^{b_2} \cdot \mathfrak{b}_0^m.$$

Ferner seien $\bar{\mathfrak{p}}$ die von den $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ verschiedenen $\mathfrak{p}$. Da nach der Voraussetzung die $\mathfrak{p}_1$ von den $\mathfrak{p}_2$ verschieden sind, bestehen dann Darstellungen

$$\alpha \equiv \pi_1^{a_1} \varrho_1^{a_1'} \alpha_1^m \text{ mod. } \mathfrak{p}_1, \quad \alpha \equiv \varrho_2^{a_2'} \alpha_2^m \text{ mod. } \mathfrak{p}_2, \quad \alpha \equiv \bar{\varrho}^{\bar{a}'} \bar{\alpha}^m \text{ mod. } \bar{\mathfrak{p}},$$

$$\beta \equiv \varrho_1^{b_1'} \beta_1^m \text{ mod. } \mathfrak{p}_1, \quad \beta \equiv \pi_2^{b_2} \varrho_2^{b_2'} \beta_2^m \text{ mod. } \mathfrak{p}_2, \quad \beta \equiv \bar{\varrho}^{\bar{b}'} \bar{\beta}^m \text{ mod. } \bar{\mathfrak{p}},$$

in denen π_1, ϱ_1; π_2, ϱ_2; $\bar{\pi}, \bar{\varrho}$ Basen für die $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \bar{\mathfrak{p}}$ im Sinne von S. 242/3 bedeuten. Nach der Definition (22) folgt daraus

$$\left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}_1}\right)_m = \left(\frac{\varrho_1}{\mathfrak{p}_1}\right)_m^{a_1 b_1'} = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{p}_1^{a_1}}\right)_m, \quad \left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}_2}\right)_m = \left(\frac{\varrho_2}{\mathfrak{p}_2}\right)_m^{-a_2' b_2} = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}_2^{b_2}}\right)_m^{-1}, \quad \left(\frac{\beta, \alpha}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_m = 1,$$

was durch Produktbildung die Behauptung ergibt.

In Verbindung mit dem in § 2 bewiesenen Reziprozitätsgesetz (IV) ergibt Satz 6 noch die für die Folge wichtige Tatsache:

Satz 7. *Sind die Führer von* $k(\sqrt[m]{\alpha})$ *und* $k(\sqrt[m]{\beta})$ *zueinander prim und ist überdies*

β m-hyperprimär für jeden in m aufgehenden m-Kernprimteiler $\mathfrak{l}'$ von α,

α m-hyperprimär für jeden in m aufgehenden m-Kernprimteiler $\mathfrak{l}''$ von β,

so ist

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m = 1.$$

Beweis: Nach der ersten Voraussetzung bestehen Darstellungen

$$\alpha = \mathfrak{a} \cdot \Pi \mathfrak{l}'^{a}, \qquad \beta = \mathfrak{b} \cdot \Pi \mathfrak{l}''^{b}; \qquad (a, b \not\equiv 0 \bmod.^{+} m),$$

in denen die m-Kerne von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ prim zu m und zueinander, und die $\mathfrak{l}'$ von den $\mathfrak{l}''$ verschieden sind. Nach Satz 6 ist daher

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{a}}\right)_m : \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right)_m.$$

Nach der zweiten Voraussetzung ist weiter

$$\left(\frac{\beta}{\mathfrak{l}'}\right)_m = 1, \qquad \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{l}''}\right)_m = 1,$$

somit auch

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_m : \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_m.$$

Daraus folgt die Behauptung nach (IV).

§ 4. Das m-te Normenrestsymbol für die in m aufgehenden Primideale $\mathfrak{l}$.

Ich setze im folgenden der Einfachheit halber k total-imaginär voraus, was für $m > 2$ von selbst erfüllt ist. Die Abweichungen, die im Falle $m = 2$ durch die unendlichen Primstellen 1-ten Grades bedingt werden, sind ja bekannt [1]).

Die Potenz $\mathfrak{l}^{ne+e_0+1}$ eines Primteilers $\mathfrak{l}$ von m sei wie a. S. 236/7 bei (18) erklärt. Ferner werde durchweg mit M das Produkt der entsprechenden Potenzen aller Primteiler $\mathfrak{l}$ von m bezeichnet und $M_{\mathfrak{l}} = \dfrac{M}{\mathfrak{l}^{ne+e_0+1}}$ gesetzt.

Sind α und β irgend zwei Zahlen $\neq 0$, so werde dazu irgendeine Zahl $\alpha_{\mathfrak{l}}$ mit den Eigenschaften

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\mathfrak{l}} \equiv \alpha \bmod. \mathfrak{l}^{ne+e_0+1} \\ \alpha_{\mathfrak{l}} \equiv 1 \bmod. M_{\mathfrak{l}} \\ \alpha_{\mathfrak{l}} \text{ hat mit } \beta \text{ höchstens den Primteiler } \mathfrak{l} \text{ gemeinsam} \end{array} \right\}$$

gewählt. Ich definiere dann das m-te Normenrestsymbol $\left(\dfrac{\beta, \alpha}{\mathfrak{l}}\right)_m$ durch die Formel:

[1]) Siehe etwa *T. Takagi* in der a. S. 240/1, Anm. zitierten Arbeit, Abschn. II, oder *Ph. Furtwängler*, „Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern", Math. Ann. 74 (1913).

$$(25) \qquad \left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right)_m = \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\beta, a_\mathfrak{l}}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1},$$

wo $\mathfrak{p}$ alle nicht in m aufgehenden Primideale durchläuft.

Diese Definition ist von der Wahl von $a_\mathfrak{l}$ unabhängig. Denn ist $\overline{a}_\mathfrak{l}$ eine andere den Bedingungen (24) genügende Zahl, so ist der Quotient $a_0 = \frac{\overline{a}_\mathfrak{l}}{a_\mathfrak{l}} \equiv 1 \mod M$, d. h. m-hyperprimär für alle $\mathfrak{l}$ (§ 1, (18)). Insbesondere ist daher der Führer von $k(\sqrt[m]{a_0})$ prim zu m. Da außerdem a_0 prim zu β ist, sind also die Führer von $k(\sqrt[m]{a_0})$ und $k(\sqrt[m]{\beta})$ zueinander prim. Nach § 3, Satz 7 ist daher $\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\beta, a_0}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, was nach dem hinteren Zerlegungssatz die behauptete Invarianz ergibt.

Es gilt ferner:

$$(26) \qquad \left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right)_m = 1, \text{ wenn } a \text{ oder } \beta \; m\text{-hyperprimär für } \mathfrak{l}.$$

Wenn a m-hyperprimär für $\mathfrak{l}$, also $a_\mathfrak{l}$ m-hyperprimär für alle $\mathfrak{l}$ und prim zu β ist, folgt das wie eben aus § 3, Satz 7. Wenn β m-hyperprimär für $\mathfrak{l}$ ist, so ist wieder $a_\mathfrak{l}$ prim zu β, und weil $a_\mathfrak{l}$ jedenfalls m-hyperprimär für die $\mathfrak{l}' \neq \mathfrak{l}$ ist, so erfüllen $a_\mathfrak{l}$ und β auch in diesem Falle die Voraussetzungen von § 3, Satz 7.

Daß für $\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right)_m$ der vordere Zerlegungssatz gilt, folgt nach der Definition (25) unmittelbar aus dessen Gültigkeit für die $\mathfrak{p}$, ebenso auch der hintere Zerlegungssatz, wenn man beachtet, daß $a_\mathfrak{l}^{(1)} a_\mathfrak{l}^{(2)}$ im Sinne von (24) zu $a_1 a_2$ und β paßt, wenn $a_\mathfrak{l}^{(1)}$ zu a_1 und β, $a_\mathfrak{l}^{(2)}$ zu a_2 und β in diesem Sinne paßt. So läßt sich auch der Vertauschungssatz beweisen. Denn werden $a_\mathfrak{l}$ und $\beta_\mathfrak{l}$ entsprechend den beiden ersten Relationen (24) zu a und β gewählt, und außerdem so, daß $a_\mathfrak{l}$ und $\beta_\mathfrak{l}$ höchstens den Primteiler $\mathfrak{l}$ gemeinsam haben, so ist nach (26) und dem vorderen Zerlegungssatz

$$\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right)_m = \left(\frac{\beta_\mathfrak{l}, a}{\mathfrak{l}}\right)_m = \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\beta_\mathfrak{l}, a_\mathfrak{l}}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1}, \qquad \left(\frac{a, \beta}{\mathfrak{l}}\right)_m = \left(\frac{a_\mathfrak{l}, \beta}{\mathfrak{l}}\right)_m = \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{a_\mathfrak{l}, \beta_\mathfrak{l}}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1}.$$

Schließlich ergibt sich so auch wieder die Formel

$$(27) \qquad \left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right)_m^{m'} = \left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right)_{m''}, \quad \text{wenn} \quad m = m' m''.$$

Denn ein gemäß (24) für den Grad m bestimmtes $a_\mathfrak{l}$ ist erst recht als solches für den Grad m'' geeignet, weil die zu m'' gehörigen Exponenten n_i'' nicht größer als die zu m gehörigen Exponenten n_i sind.

Die Feststellung (26) in Verbindung mit den beiden Zerlegungssätzen ergibt, daß das Symbol $\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right)_m$ wirklich ein Symbol „für $\mathfrak{l}$" ist, nämlich nur von den Restklassen von a und β mod. $\mathfrak{l}^{ne+e_0+1}$ abhängt, eine Tatsache, die hier nicht, wie die analoge in § 3, unmittelbar aus der Definition ersichtlich ist.

Ich beweise nunmehr, ganz nach dem Muster von § 3, daß $\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right)_m$ m-tes Normenrestsymbol für $\mathfrak{l}$ ist.

Satz 8. *Ist* $\beta \equiv N_{Kk}(\mathsf{B}) \bmod \mathfrak{l}^{ne+e_0+1}$ *mit* B *aus* $K = k(\sqrt[m']{a})$, *so ist* $\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right)_m = 1$.

Beweis: Für jede Zerlegung $m = m'm''$ werde wieder $K_{m'} = k\sqrt[m']{a}$ gesetzt und unter $\mathfrak{L}_{m'}$ einer der Primteiler von $\mathfrak{l}$ in $K_{m'}$ verstanden, während $\mathfrak{P}_{m'}$ alle nicht in m aufgehenden Primteiler von $K_{m'}$ durchläuft [1]).

1.) Es sei K/k vom Grade m. Der Zerlegungs- und der Trägheitskörper zu $\mathfrak{l}$ für K/k seien k.

Dann ist

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{L}^m, \qquad N_{Kk}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{l}.$$

Nach dem oben Gesagten genügt es, $\left(\frac{\varrho, a}{\mathfrak{l}}\right)_m = 1$ für ein

$$\varrho \equiv \beta \equiv N_{Kk}(\mathsf{B}) \mod \mathfrak{l}^{ne+e_0+1}$$

zu beweisen. Ist nun

$$\mathsf{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{L}^b \qquad (\mathfrak{B} \text{ prim zu } \mathfrak{L}),$$

also

$$\beta = \mathfrak{b}\mathfrak{l}^b \qquad (\mathfrak{b} \text{ prim zu } \mathfrak{l}),$$

so kann ein solches ϱ nach dem Satz von der arithmetischen Progression [2]) zudem folgenden Bedingungen unterworfen werden:

$$\varrho = \mathfrak{r}\mathfrak{l}^b \quad (\mathfrak{r} \text{ ein nicht in } m \text{ aufgehendes Primideal}).$$

$$\varrho \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}_0 M_\mathfrak{l},$$

wo $\mathfrak{f}_0$ den zu m primen Bestandteil des Führers $\mathfrak{f}$ von K/k bedeutet. Hat a die Zerlegung

$$a = \mathfrak{a} \cdot \Pi \mathfrak{l}^a \qquad (\mathfrak{a} \text{ prim zu } m),$$

so enthält $\mathfrak{f}_0$ alle und nur die m-Kernprimteiler von $\mathfrak{a}$ (in erster Potenz). Nach § 1, (18a) ist daher $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{a}}\right)_m = 1$, und nach § 3, Satz 6 somit

$$\prod_\mathfrak{p} \left(\frac{\varrho, a}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1} = \left(\frac{a}{\mathfrak{r}}\right)_m : \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{a}}\right)_m = \left(\frac{a}{\mathfrak{r}}\right)_m.$$

Ich zeige nun zunächst, daß auch $\left(\frac{a}{\mathfrak{r}}\right)_m = 1$ ist. Nach dem *Artin*schen Gesetz (II) genügt es dazu festzustellen, daß $\mathfrak{r}$ in der Hauptklasse nach K in k liegt. Das ergibt sich aus der Normenresteigenschaft von $\varrho \bmod \mathfrak{l}^{ne+e_0+1}$ und den beiden anderen, seiner Wahl zugrundegelegten Bedingungen folgendermaßen:

Es werde ein

$$\mathsf{B}' = \mathfrak{B}'\mathfrak{L}^b \qquad (\mathfrak{B}' \text{ prim zu } \mathfrak{f}_0 M)$$

in K bestimmt. Dann ist

---

[1]) Siehe S. 244, Anm.

[2]) H. I, § 8.

$$\frac{\varrho}{N_{Kk}(\mathfrak{B}')} \equiv \frac{N_{Kk}(\mathfrak{B})}{N_{Kk}(\mathfrak{B}')} \equiv N_{Kk}\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'}\right) \text{ mod. } \mathfrak{l}^{ne+e_0+1} \left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} \text{ prim zu } \mathfrak{l}\right),$$

$$\frac{\varrho}{N_{Kk}(\mathfrak{B}')} \equiv \frac{1}{N_{Kk}(\mathfrak{B}')} \equiv N_{Kk}\left(\frac{1}{\mathfrak{B}'}\right) \text{ mod. } \mathfrak{f}_0 M_\mathfrak{l} \quad \left(\frac{1}{\mathfrak{B}'} \text{ prim zu } \mathfrak{f}_0 M_\mathfrak{l}\right).$$

Also kann ein $\bar{\mathfrak{B}}$ in K so gefunden werden, daß

$$\frac{\varrho}{N_{Kk}(\mathfrak{B}')} \equiv N_{Kk}(\bar{\mathfrak{B}}) \text{ mod. } \mathfrak{f}_0 M \qquad (\bar{\mathfrak{B}} \text{ prim zu } \mathfrak{f}_0 M)$$

gilt. Da der volle Führer $\mathfrak{f}$ nach § 1, Satz 2 Teiler von $\mathfrak{f}_0 M$ ist, ergibt sich hieraus, daß $\frac{\varrho}{N_{Kk}(\mathfrak{B}')}$ primer Normenrest mod. $\mathfrak{f}$ ist, also in der Hauptklasse nach K in k liegt. Dasselbe gilt dann auch für

$$\mathfrak{r} = \frac{\varrho}{\mathfrak{l}^b} = \frac{\varrho}{N_{Kk}(\mathfrak{L}^b)} = \frac{\varrho}{N_{Kk}(\mathfrak{B}')} N_{Kk}(\mathfrak{B}').$$

Damit ist nach dem schon Gesagten festgestellt, daß

$$\prod_\mathfrak{p} \left(\frac{\varrho, a}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1} = 1$$

ist. Für die $\mathfrak{l}' \neq \mathfrak{l}$ ist ϱ nun m-hyperprimär gewählt, also nach (26)

$$\left(\frac{\varrho, a}{\mathfrak{l}'}\right)_m = \prod_\mathfrak{p} \left(\frac{\varrho, a_{\mathfrak{l}'}}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1} = 1,$$

wenn die $a_{\mathfrak{l}'}$ zu a und ϱ gemäß (24) gewählt sind. Ebenso werde auch $a_\mathfrak{l}$ gewählt. Es ist dann nach (24)

$$a \equiv a_\mathfrak{l} \cdot \Pi\, a_{\mathfrak{l}'} \text{ mod. } M,$$

und die $a_\mathfrak{l}$, $a_{\mathfrak{l}'}$ sind prim zu $\mathfrak{r}$. Auch a enthält nach Wahl von ϱ jedenfalls $\mathfrak{r}$ nicht im m-Kern. Nach § 3, Satz 7, angewandt auf den Quotienten $\frac{a}{a_\mathfrak{l} \cdot \Pi\, a_{\mathfrak{l}'}}$, folgt also

$$\prod_\mathfrak{p} \left(\frac{\varrho, a_\mathfrak{l}}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1} \cdot \prod_\mathfrak{p} \left(\frac{\varrho, \Pi\, a_{\mathfrak{l}'}}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1} = \prod_\mathfrak{p} \left(\frac{\varrho, a}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1}.$$

Nach den vorher erhaltenen Resultaten ergibt das in der Tat

$$\left(\frac{\varrho, a}{\mathfrak{l}}\right)_m = \prod_\mathfrak{p} \left(\frac{\varrho, a_\mathfrak{l}}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1} = 1.$$

2.) Es sei K/k vom Grade m. Der Zerlegungskörper zu $\mathfrak{l}$ für K/k sei k.
Ist dann $K_{m'}$ der Trägheitskörper zu $\mathfrak{l}$ für K/k, so ist

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{L}_{m'}, \qquad N_{K_{m'}k}(\mathfrak{L}_{m'}) = \mathfrak{l}^{m'}.$$

Es sei

$$\mathfrak{B}_{m'} = N_{KK_{m'}}(\mathfrak{B}), \quad \text{also} \quad \beta \equiv N_{K_{m'}k}(\mathfrak{B}_{m'}) \text{ mod. } \mathfrak{l}^{ne+e_0+1}.$$

Um $_{K_{m'}}\left(\frac{\mathfrak{B}_{m'}, \sqrt[m']{a}}{\mathfrak{L}_{m'}}\right)_{m''}$ zu bilden, werde ein $\mathfrak{A}_{\mathfrak{L}_{m'}}$ aus $K_{m'}$ mit den zu (24) analogen Eigenschaften

$$\mathsf{A}_{\mathfrak{L}_{m'}} \equiv \sqrt[m']{a} \mod. \mathfrak{L}_{m'}^{ne+e_0+1}$$

$$\mathsf{A}_{\mathfrak{L}_{m'}} \equiv 1 \mod. \overline{M}_{\mathfrak{L}_{m'}},$$

$\mathsf{A}_{\mathfrak{L}_{m'}}$ hat mit $\mathsf{B}_{m'}$ höchstens den Primteiler $\mathfrak{L}_{m'}$ gemeinsam

gewählt. Dabei seien $\overline{M}$ und $\overline{M}_{\mathfrak{L}_{m'}}$ in $K_{m'}$ analog gebildet, wie M und $M_\mathfrak{l}$ in k, und zwar — was für den beabsichtigten Zweck nichts ausmacht — ebenfalls mit den zum Grade m gehörigen Exponenten n_i (nicht nur mit den ev. kleineren, zum Grade m'' gehörigen Exponenten n_i'') [1]). Der invarianten Bedeutung von Potenzen der Art $\mathfrak{l}^e$ und $\mathfrak{l}^{e_0}$ halber (Beiträge von $\mathfrak{l}$ zu den festen l und $\mathfrak{l}_0$) sind dann M und $M_\mathfrak{l}$ Multipla (die kleinsten in k) von $\overline{M}$ und $\overline{M}_{\mathfrak{L}_{m'}}$. Somit folgt durch Potenzierung mit m' und Vergleich mit (24)

$$\mathsf{A}_{\mathfrak{L}_{m'}}^{m'} \equiv a_\mathfrak{l} \mod. \overline{M}.$$

Dabei sei $a_\mathfrak{l}$ gemäß (24) zu a und $N_{Kk}(\mathsf{B}) = N_{K_{m'}k}(\mathsf{B}_{m'})$ gewählt, aber überdies auch so, daß in den Zerlegungen

$$a_\mathfrak{l} = \mathfrak{a}_\mathfrak{l}\,\mathfrak{l}^a \qquad (\mathfrak{a}_\mathfrak{l} \text{ prim zu } m)$$

$$\mathsf{B}_{m'} = \mathfrak{B}_{m'} \cdot \Pi\, \mathfrak{L}_{m'}^b \qquad (\mathfrak{B}_{m'} \text{ prim zu } m)$$

$\mathfrak{a}_\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{B}_{m'}$ prim zueinander sind. Nach § 3, (23), Satz 6, Satz 7 und § 1, (19), (20) ergibt sich dann die Transformation

$$\left(\frac{\beta,\, a}{\mathfrak{l}}\right)_m = \left(\frac{N_{K_{m'}k}(\mathsf{B}_{m'}),\, a}{\mathfrak{l}}\right)_m = \prod_\mathfrak{p} \left(\frac{N_{K_{m'}k}(\mathsf{B}_{m'}),\, a_\mathfrak{l}}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1}$$

$$= \left(\frac{a_\mathfrak{l}}{N_{K_{m'}k}(\mathfrak{B}_{m'})}\right)_m : \left(\frac{N_{K_{m'}k}(\mathsf{B}_{m'})}{a_\mathfrak{l}}\right)_m = \left(\frac{a_\mathfrak{l}}{\mathfrak{B}_{m'}}\right)_m : \left(\frac{\mathsf{B}_{m'}}{a_\mathfrak{l}}\right)_m$$

$$= \prod_{\mathfrak{P}_{m'}} \left(\frac{\mathsf{B}_{m'},\, a_\mathfrak{l}}{\mathfrak{P}_{m'}}\right)_m^{-1} = \prod_{\mathfrak{P}_{m'}} \left(\frac{\mathsf{B}_{m'},\, \mathsf{A}_{\mathfrak{L}_{m'}}^{m'}}{\mathfrak{P}_{m'}}\right)_m^{-1}$$

$$= \prod_{\mathfrak{P}_{m'}} \left(\frac{\mathsf{B}_{m'},\, \mathsf{A}_{\mathfrak{L}_{m'}}}{\mathfrak{P}_{m'}}\right)_{m''}^{-1} = \left(\frac{\mathsf{B}_{m'},\, \sqrt[m']{a}}{\mathfrak{L}_{m'}}\right)_{m''}.$$

Hierdurch wird die Behauptung auf den Fall 1.) zurückgeführt.

3.) Keine Einschränkung.

Ist dann $K_{m'}$ der Zerlegungskörper zu $\mathfrak{l}$ für K/k [1]), so ist

$$\mathfrak{l} = \Pi\, \mathfrak{L}_{m'}, \qquad N_{K_{m'}k}(\mathfrak{L}_{m'}) = \mathfrak{l}.$$

Um $\left(\frac{\beta,\, \sqrt[m']{a}}{\mathfrak{L}_{m'}}\right)_{m''}$ zu bilden, werde ein $\mathsf{A}_{\mathfrak{L}_{m'}}$ aus $K_{m'}$ ganz entsprechend wie im Falle 2.) (jetzt zu β statt zu $\mathsf{B}_{m'}$) gebildet. Unter Beachtung, daß jetzt die zu $\mathfrak{L}_{m'}$ in $K_{m'}/k$ konjugierten ebenfalls in $\overline{M}_{\mathfrak{L}_{m'}}$ eingehen, ergibt sich hier

---

[1]) Man würde übrigens auch — was methodisch schöner ist — mit den n_i'' auskommen, weil nachher mit m' potenziert wird.

[2]) Siehe S. 246. Anm.

$$N_{K_{m'}k}(\mathsf{A}_{\mathfrak{L}_{m'}})^{m'} \equiv a_{\mathfrak{l}} \bmod \overline{M}, \quad \text{also auch mod. } M.$$

Dabei sei $a_{\mathfrak{l}}$ gemäß (24) zu a und β gewählt. Bestehen dann die Zerlegungen

$$\mathsf{A}_{\mathfrak{L}_{m'}} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{L}_{m'}} \mathfrak{L}_{m'}^{a} \qquad (\mathfrak{A}_{\mathfrak{L}_{m'}} \text{ prim zu } m)$$

$$\beta = \mathfrak{b} \cdot \Pi\, \mathfrak{l}^{b} \quad (\mathfrak{b} \text{ prim zu } m),$$

in denen $\mathfrak{A}_{\mathfrak{L}_{m'}}$ und $\mathfrak{b}$ nach der Wahl von $\mathsf{A}_{\mathfrak{L}_{m'}}$ prim zueinander sind, so ergibt sich, ähnlich wie vorher, die Transformation

$$\begin{aligned}
{}_k\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right)_m &= \prod_{\mathfrak{p}} {}_k\left(\frac{\beta, a_{\mathfrak{l}}}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1} = \prod_{\mathfrak{p}} {}_k\left(\frac{\beta, N_{K_{m'}k}(\mathsf{A}_{\mathfrak{L}_{m'}})^{m'}}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1} \\
&= \prod_{\mathfrak{p}} {}_k\left(\frac{\beta, N_{K_{m'}k}(\mathsf{A}_{\mathfrak{L}_{m'}})}{\mathfrak{p}}\right)_{m''}^{-1} \\
&= {}_k\left(\frac{N_{K_{m'}k}(\mathsf{A}_{\mathfrak{L}_{m'}})}{\mathfrak{b}}\right)_{m''} : {}_k\left(\frac{\beta}{N_{K_{m'}k}(\mathfrak{A}_{\mathfrak{L}_{m'}})}\right)_{m''} \\
&= {}_{K_{m'}}\left(\frac{\mathsf{A}_{\mathfrak{L}_{m'}}}{\mathfrak{b}}\right)_{m''} : {}_{K_{m'}}\left(\frac{\beta}{\mathfrak{A}_{\mathfrak{L}_{m'}}}\right)_{m''} = \prod_{\mathfrak{P}_{m'}} {}_{K_{m'}}\left(\frac{\beta, \mathsf{A}_{\mathfrak{L}_{m'}}}{\mathfrak{P}_{m'}}\right)_{m''}^{-1} = {}_{K_{m'}}\left(\frac{\beta, \sqrt[m']{a}}{\mathfrak{P}_{m'}}\right)_{m''}.
\end{aligned}$$

Hierdurch wird, wie im Falle 3.) des Beweises von § 3, Satz 4, die Behauptung auf den Fall 2.) zurückgeführt.

Hilfssatz 4. *Ist $K = k(\sqrt[m]{a})$, so ist der Index der Gruppe der Normenrestklassen mod. $\mathfrak{l}^{ne+e_0+1}$ von K/k höchstens gleich dem Grade von K über dem Zerlegungskörper zu $\mathfrak{l}$ für K/k.*

Beweis: Ganz analog wie der Beweis von § 3, Hilfssatz 3, wenn man nur, wie im vorigen Beweis, die $\mathfrak{l}^{ne+e_0+1}$ entsprechenden Potenzen durchweg mit demselben Exponenten n bildet und für die Induktion beachtet, daß nach § 1, Hilfssatz 1 der Index der Normenrestklassengruppe sich nicht weiter vergrößert, wenn man den Modul über die mit dem „richtigen" Exponenten n gebildete, $\mathfrak{l}^{ne+e_0+1}$ entsprechende Potenz hinaus erhöht.

Satz 9. *Ist $\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right)_m = 1$, so ist $\beta \equiv N_{Kk}(\mathsf{B})$ mod $\mathfrak{l}^{ne+e_0+1}$ mit B aus $K = k(\sqrt[m]{a})$.*

Beweis: Wie im Beweis von § 3, Satz 5 genügt es, die Existenz eines β nachzuweisen, für das $\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right)_m$ eine primitive m''-te Einheitswurzel ist, wenn m'' der Grad von K über den Zerlegungskörper $K_{m'}$ zu $\mathfrak{l}$ für K/k ist.

1.) Es sei K/k vom Grade m. Der Zerlegungskörper zu $\mathfrak{l}$ für K/k sei k.

Dann ist also ein β anzugeben, für das $\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right)_m$ eine primitive m-te Einheitswurzel ist. Es sei nun, wie bei § 1, (16)

$$m_i = \prod_{i=1}^{r} l_i^{n_i}, \quad \sum_{i=1}^{r} L_i \frac{m}{l_i^{n_i}} = 1, \text{ also } L_i \begin{cases} \equiv 0 \bmod l_j^{n_j} \text{ für } j \neq i \\ \not\equiv 0 \bmod l_i \end{cases}.$$

Dann ist k auch der Zerlegungskörper zu $\mathfrak{l}$ für die K_{l_i}/k. Bekanntlich [1]) existieren dann β_i, so daß die Symbole $\left(\frac{\beta,\,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)_{l_i}$ primitive l_i-te Einheitswurzeln sind.

Nach (27) sind dann die Symbole $\left(\frac{\beta,\,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)_{l_i^{n_i}}$ primitive $l_i^{n_i}$-te Einheitswurzeln. Wird ferner

$$\beta = \prod_{i=1}^{r} \beta_i^{L_i}, \qquad \text{also } \beta = \beta_i^{L_i}\,\bar{\beta}_i^{n_i} \text{ für } i = 1, \ldots, r$$

gesetzt, so gilt das gleiche für die Symbole $\left(\frac{\beta,\,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)_{l_i^{n_i}} = \left(\frac{\beta_i,\,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)_{l_i^{n_i}}^{L_i}$, also auch für die Symbole $\left(\frac{\beta,\,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)_{l_i^{n_i}}^{L_i}$. Durch erneute Anwendung von (27) ähnlich wie in § 1, (16) ergibt sich daraus, daß das Symbol

$$\left(\frac{\beta,\,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)_m = \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{\beta,\,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)_{l_i^{n_i}}^{L_i}$$

eine primitive m-te Einheitswurzel ist.

2.) Keine Einschränkung.

Ist dann $K_{m'}$ der Zerlegungskörper zu $\mathfrak{l}$ für K/k, so liegt für $K/k_{m'}$ der Fall 1.) vor, und es gibt daher ein $\mathsf{B}_{m'}$ in K_m, für das $\left(\frac{\mathsf{B}_{m'},\,\sqrt[m']{a}}{\mathfrak{L}_{m'}}\right)_{m''}$ eine primitive m''-te Einheitswurzel ist. Da die Restklasse $\mathsf{B}_{m'}$ mod. $\mathfrak{L}_{m'}^{ne+e_0+1}$ in $K_{m'}$ durch eine Zahl β aus k repräsentiert werden kann, folgt dann nach der Transformation im Beweis von Satz 8, Fall 3.) dasselbe für $\left(\frac{\beta,\,\alpha}{\mathfrak{l}}\right)_m$.

§ 5. Beweis der Produktformel (V).

Es seien für alle $\mathfrak{l}$ Zahlen $a_\mathfrak{l}$ zu a und β gemäß § 4, (24) gewählt. Dann ist

$$a \equiv \prod_{\mathfrak{l}} a_\mathfrak{l} \pmod{M},$$

also

$$a = a_0 \cdot \Pi\, a_\mathfrak{l} \qquad \text{mit } a_0 \equiv 1 \pmod{M}.$$

Nun ist, wenn $\mathfrak{w}$ alle Primideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{l}$ durchläuft,

$$\prod_{\mathfrak{w}} \left(\frac{\beta,\,\alpha}{\mathfrak{w}}\right)_m = \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\beta,\,\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m \cdot \prod_{\mathfrak{l}} \left(\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\beta,\,a_\mathfrak{l}}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1}\right)$$

$$= \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\beta,\,\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_m \cdot \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\beta,\,\Pi\, a_\mathfrak{l}}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\beta,\,a_0}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1}.$$

---

[1]) Siehe *T. Takagi* in der a. S. 240/1, Anm. zitierten Arbeit, S. 37.

Es ist also nur noch zu beweisen:

$$\prod_{\mathfrak{p}} \prod \left(\frac{\beta,\ a_0}{\mathfrak{p}}\right)_m = 1, \quad \text{wenn } a_0 \equiv 1 \bmod. M,$$

während β nur $\neq 0$ vorausgesetzt wird.

Für jede Zerlegung $m = m'm''$ bedeute dazu $\mathfrak{a}_{m'}^{m'}$ das Aggregat derjenigen Primidealpotenzen von a_0, die erstens nicht prim zu β sind und zweitens in a_0 genau zu Exponenten vom größten gemeinsamen Teiler m' mit m eingehen. Dann besitzt also a_0 eine Zerlegung

$$a_0 = \prod_{m'} \mathfrak{a}_{m'}^{m'} \cdot \mathfrak{a}_0 \qquad (\mathfrak{a}_0 \text{ prim zu } \beta).$$

Zu den $\mathfrak{a}_{m'}$ seien nun $a_{m'}$ so bestimmt, daß

$$a_{m'} = \mathfrak{a}_{m'} \bar{\mathfrak{a}}_{m'} \qquad (\bar{\mathfrak{a}}_{m'} \text{ prim zu } \beta)$$
$$a_{m'} \equiv 1 \bmod. M$$

ist. Dann ist

$$a_0 = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{a}_{m'}^{m'} \cdot \bar{a}_0,$$

wobei

$$\bar{a}_0 \equiv 1 \bmod M, \qquad \bar{a}_0 \text{ prim zu } \beta$$

ist. Nach § 3, Satz 7 ist daher

$$\prod_{\mathfrak{p}} \prod \left(\frac{\beta,\ \bar{a}_0}{\mathfrak{p}}\right)_m = 1.$$

Es bleibt daher unter Beachtung von § 3, (23) noch zu beweisen:

$$\prod_{\mathfrak{p}} \prod \left(\frac{\beta,\ a_{m'}^{m'}}{\mathfrak{p}}\right)_m = \prod_{\mathfrak{p}} \prod \left(\frac{\beta,\ a_{m'}}{\mathfrak{p}}\right)_{m''} = 1 \text{ für alle } m'.$$

Der Gleichartigkeit dieser Relationen halber genügt es, den Fall $m' = 1$, $m'' = m$ durchzuführen, d. h.

$$\prod_{\mathfrak{p}} \prod \left(\frac{\beta, a_1}{\mathfrak{p}}\right)_m = 1$$

zu beweisen. Dabei ist nach Konstruktion

$$a_1 \equiv 1 \bmod. M,$$

und wenn noch $\mathfrak{b}$ das Aggregat der zu a_1 nicht primen Primidealpotenzen von β bezeichnet, so bestehen Zerlegungen

$$a_1 = \mathfrak{a}_1 \bar{\mathfrak{a}}_1, \qquad \beta = \mathfrak{b}\bar{\mathfrak{b}}$$

mit folgenden Eigenschaften:

$\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}$ bestehen aus genau denselben Primteilern.

Diese gehen in $\mathfrak{a}_1$ genau mit zu m primen Exponenten ein.

Die übrigen Primteiler von a_1 und β, also die von $\bar{\mathfrak{a}}_1$ und die von $\bar{\mathfrak{b}}$ sind von diesen und untereinander verschieden.

Jeder Primteiler von $\mathfrak{b}$ ist daher, als genau mit zu m primem Exponenten ein-

gehender Primteiler von a_1, in $K = k(\sqrt[m]{a_1})$ voll-verzweigt, also Relativnorm eines Primideals aus K. Somit wird

$$\mathfrak{b} = N_{Kk}(\mathfrak{B}).$$

Demgemäß werde

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1 \quad (\mathfrak{B}_1 \text{ prim zu } a_1)$$

bestimmt und

$$\beta_1 = N_{Kk}(\mathfrak{B}_1) = \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$$

gesetzt, wobei also $\mathfrak{b}_1 = N_{Kk}(\mathfrak{B}_1)$ prim zu a_1 ist. Dann ist auch

$$\frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\overline{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}_1}$$

prim zu a_1, also nach § 3, Satz 7

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\beta}{\beta_1}, \frac{a_1}{\mathfrak{p}}\right)_m = 1.$$

Ferner ist wegen $\beta_1 = N_{Kk}(\mathfrak{B}_1)$ nach § 3, Satz 4

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\beta_1, a_1}{\mathfrak{p}}\right)_m = 1.$$

Somit folgt auch

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\beta, a_1}{\mathfrak{p}}\right)_m = 1,$$

und damit nach dem schon Gesagten die Behauptung.

Anhang: Ergänzung zum Beweis der Übergangsregel § 1, (20).

Hilfssatz 5. *Es ist a dann und nur dann m-primär für $\mathfrak{l}$, wenn*

$$\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right)_m = 1 \quad \textit{für alle zu } \mathfrak{l} \textit{ primen } \beta$$

gilt.

Beweis: a) Ist a m-primär für $\mathfrak{l}$, ferner β prim zu $\mathfrak{l}$, und wird $a_\mathfrak{l}$ gemäß § 4, (24) zu a und β bestimmt, so ist auch $a_\mathfrak{l}$ m-primär für $\mathfrak{l}$, ferner $a_\mathfrak{l}$ m-hyperprimär für alle $\mathfrak{l}' \neq \mathfrak{l}$, also der Führer von $k(\sqrt[m]{a_\mathfrak{l}})$ prim zu m, weiter $a_\mathfrak{l}$ prim zu β, also der Führer von $k(\sqrt[m]{a_\mathfrak{l}})$ prim zum Führer von $k(\sqrt[m]{\beta})$. Nach § 3, Satz 7 folgt daraus

$$\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right)_m = \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\beta, a_\mathfrak{l}}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1} = 1.$$

b) Ist a nicht m-primär für $\mathfrak{l}$, so gibt es zwischen $K = k(\sqrt[m]{a})$ und dem Zerlegungskörper $K_{m'}$ zu $\mathfrak{l}$ für K/k einen solchen Körper $K_{\overline{m}'}$ $(m = \overline{m}'l'$, l' Primzahl), daß $\mathfrak{L}_{\overline{m}'}$ im Führer von $K/K_{\overline{m}'}$ aufgeht[1]). Bekanntlich[2]) gibt es dann einen zu

[1]) Die Bezeichnungen bedürfen nach dem Vorhergehenden wohl keiner Erläuterung mehr.

[2]) H I a, § 10, Satz $4_\mathfrak{k}$.

$\mathfrak{L}_{\bar{m}'}$ primen Normennichtrest mod. $\mathfrak{L}_{\bar{m}'}^{n\bar{e}'+\bar{e}_0'+1}$ von $K/K_{\bar{m}'}$. Weil nun nach dem Beweise zu § 4, Hilfssatz 4 und dem a. S. 247, Anm. 4 Gesagten bei der Relativnormbildung von $K_{\bar{m}'}$ nach $K_{m'}$, auch nur den Normenrestklassen mod. $\mathfrak{L}_{\bar{m}}^{n\bar{e}'+\bar{e}_0'+1}$ von $K/K_{\bar{m}'}$ die Normenrestklassen mod. $\mathfrak{L}_{m'}^{ne'+e_0'+1}$ von $K/K_{m'}$ entsprechen, so ist dann $\mathsf{B}_{m'} = N_{K_{\bar{m}'}K_{m'}}(\mathsf{B}_{\bar{m}'})$ zu $\mathfrak{L}_{m'}$ primer Normennichtrest mod. $\mathfrak{L}_{m'}^{ne'+e_0'+1}$ von $K/K_{m'}$, und dieser liefert in der a. S. 247 angegebenen Art aus demselben Grunde einen zu $\mathfrak{l}$ primen Normennichtrest β mod. $\mathfrak{l}^{ne+e_0+1}$ von K/k. Nach § 4, Satz 9 ist für ihn $\left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right)_m \neq 1$ [1]).

Im Beweise zu § 1, (20) blieb noch zu zeigen:

Ist $\mathfrak{l}$ prim zum Führer von $K(\sqrt[m]{\mathsf{A}})$, d. h. A m-primär in K für alle Primteiler $\mathfrak{L}_i$ von $\mathfrak{l}$ in K, und daher $_k\left(\frac{\mathsf{A}}{\mathfrak{l}}\right)_m$ definiert, so ist auch $\mathfrak{l}$ prim zum Führer von $k(\sqrt[m]{N_{Kk}(\mathsf{A})})$, d. h. $N_{Kk}(\mathsf{A})$ m-primär für $\mathfrak{l}$ in k, und daher $_k\left(\frac{N_{Kk}(\mathsf{A})}{\mathfrak{l}}\right)_m$ definiert, und es sind dann beide Symbole gleich.

Am tiefsten liegt hier die erste Behauptung, daß $N_{Kk}(\mathsf{A})$ m-primär für $\mathfrak{l}$ in k ist. Diesen Nachweis führe ich so:

Nach Voraussetzung und Hilfssatz 5 gilt insbesondere:

$$_K\left(\frac{\beta, \mathsf{A}}{\mathfrak{L}_i}\right)_m = 1 \quad \text{für alle zu } \mathfrak{l} \text{ primen } \beta.$$

Werden nun die $\mathsf{A}_{\mathfrak{L}_i}$ gemäß § 4, (24) zu A und β bestimmt, also:

$$\begin{aligned} \mathsf{A}_{\mathfrak{L}_i} &\equiv \mathsf{A} \bmod. \mathfrak{L}_i^{nE_i+E_i^{(0)}+1} \\ \mathsf{A}_{\mathfrak{L}_i} &\equiv 1 \bmod. \mathfrak{L}_j^{nE_j+E_j^{(0)}+1} \qquad \text{für } j \neq i \\ \mathsf{A}_{\mathfrak{L}_i} &\equiv 1 \bmod. \mathfrak{L}_j^{\prime n'E'_j+E_j'^{(0)}+1}, \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{L}_j'$ die Primteiler der $\mathfrak{l}' \neq \mathfrak{l}$ in K durchläuft und die Exponenten jedesmal nach der bekannten Vorschrift gebildet sind, so folgt für ihr Produkt $\mathsf{A}_\mathfrak{l} = \prod_i \mathsf{A}_{\mathfrak{L}_i}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{A}_\mathfrak{l} &\equiv \mathsf{A} \bmod. \prod_i \mathfrak{L}_i^{nE_i+E_i^{(0)}+1} \\ \mathsf{A}_\mathfrak{l} &\equiv 1 \bmod. \prod_j \mathfrak{L}_j^{\prime n'E'_j+E_j'^{(0)}+1}, \end{aligned}$$

also für die Relativnorm $a_\mathfrak{l} = N_{Kk}(\mathsf{A}_\mathfrak{l})$ [2]):

$$\begin{aligned} a_\mathfrak{l} &\equiv N_{Kk}(\mathsf{A}) \bmod. \mathfrak{l}^{ne+e_0+1} \\ a_\mathfrak{l} &\equiv 1 \bmod. \prod \mathfrak{l}'^{n'e'+e_0'+1}, \quad \text{d. h. mod. } M_\mathfrak{l}, \end{aligned}$$

---

[1]) Man hätte auch den Teil a) des Beweises auf entsprechende Art, wie den Teil b) führen können.

[2]) Siehe S. 234, Anm. 1.

so daß diese Relativnorm $a_\mathfrak{l} = N_{Kk}(\mathsf{A}_\mathfrak{l})$ zu $a = N_{Kk}(\mathsf{A})$ und β im Sinne von § 4, (24) gewählt werden kann. Hat also β die Zerlegung

$$\beta = \mathfrak{b} \cdot \Pi\, \mathfrak{l}'^{b} \qquad (\mathfrak{b} \text{ prim zu } m),$$

so ergibt sich, wie schon mehrfach

$$1 = \prod_i \prod_K \left(\frac{\beta, \mathsf{A}}{\mathfrak{Q}_i}\right)_m = \prod_i \prod_{\mathfrak{P}} \prod_K \left(\frac{\beta, \mathsf{A}_{\mathfrak{Q}_i}}{\mathfrak{P}}\right)_m^{-1} = \prod_{\mathfrak{P}} \prod_K \left(\frac{\beta, \mathsf{A}_\mathfrak{l}}{\mathfrak{P}}\right)_m^{-1}$$

$$= \prod_K \left(\frac{\mathsf{A}_\mathfrak{l}}{\mathfrak{b}}\right)_m : \prod_K \left(\frac{\beta}{\mathsf{A}_\mathfrak{l}}\right)_m = \prod_k \left(\frac{a_\mathfrak{l}}{\mathfrak{b}}\right)_m : \prod_k \left(\frac{\beta}{a_\mathfrak{l}}\right)_m = \prod_{\mathfrak{p}} \prod_k \left(\frac{\beta, a_\mathfrak{l}}{\mathfrak{p}}\right)_m^{-1} = \prod_k \left(\frac{\beta, a}{\mathfrak{l}}\right)_m .$$

Nach Hilfssatz 5 folgt daraus, daß $a = N_{Kk}(\mathsf{A})$ m-primär für $\mathfrak{l}$ in k ist, wie behauptet.

Nunmehr liefert das *Artin*sche Gesetz (II) leicht die an zweiter Stelle behauptete Gleichheit:

Es sei $\mathfrak{f}$ ein gemeinsames Multiplum in k der Führer von $K(\sqrt[m]{\mathsf{A}})$ und $k(\sqrt[m]{N_{Kk}(\mathsf{A})})$, das nach dem Bewiesenen prim zu $\mathfrak{l}$ gewählt werden kann. Dann gibt es in der Strahlklasse von $\mathfrak{l}$ mod. $\mathfrak{f}$ ein zu m primes $\mathfrak{b}$. Nach (II) ist dafür

$$\prod_K \left(\frac{\mathsf{A}}{\mathfrak{l}}\right)_m = \prod_K \left(\frac{\mathsf{A}}{\mathfrak{b}}\right)_m, \quad \prod_k \left(\frac{N_{Kk}(\mathsf{A})}{\mathfrak{l}}\right)_m = \prod_k \left(\frac{N_{Kk}(\mathsf{A})}{\mathfrak{b}}\right)_m .$$

Hierdurch wird der verlangte Nachweis auf den bereits bewiesenen Teil der Behauptung § 1, (20) zurückgeführt.

Über den Weierstrass'schen Vorbereitungssatz.

Von *Wilhelm Wirtinger* in Wien.

Die folgenden Zeilen bringen einige Ausführungen zu diesem wohlbekannten Satz, welche die formale Seite mehr hervorheben und dadurch die Hilfsmittel zum Beweis bedeutend vereinfachen, dann aber gestatten, für die Koeffizienten der auftretenden Potenzreihen explizite Formeln zu geben und endlich bestimmtere Angaben über den Konvergenzbereich nach der Majorantenmethode zu machen.

Es zeigt sich, daß die Heranziehung des *Cauchy*'schen Satzes oder ähnlicher Hilfsmittel entbehrlich ist und nur der Satz gebraucht wird, daß eine im endlichen überall reguläre Funktion, welche im Unendlichen einen Pol n-ter Ordnung hat, eine ganze rationale Funktion n-ten Grades ist.

Literaturangaben findet man bei *Osgood*, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 2, S. 71. Diesen sei noch hinzugefügt: *E. Goursat*, Bulletin d. l. Société Math. d. France, tome 36 (1908) und *G. Vranceanu*, Rendiconti di Palermo, Tom. L (1926), S 428 ff.

I.

Beschränken wir uns zunächst auf zwei Veränderliche s, z, so können wir ohne Verlust an Allgemeinheit den Vorbereitungssatz folgendermaßen aussprechen:

Sei $f(s, z)$ für $|s| \leqq 1$, $|z| \leqq 1$ eine reguläre analytische Funktion der beiden Veränderlichen s und z, sei ferner

$$f(s, 0) = s^n + a_1 s^{n+1} + a_2 s^{n+2} + \cdots = s^n a(s).$$

Dann ist in einem gewissen Gebiet von s und z identisch

$$(1) \qquad f(s, z) = (s^n + b_1(z) s^{n-1} + b_2(z) s^{n-2} + \cdots + b_n(z)) e^{B(s,z)},$$

wo $b_1(z), b_2(z), b_3(z), \ldots, b_n(z)$ Potenzreihen von z sind, welche für $z = 0$ verschwinden und $B(s, z)$ eine Potenzreihe von s und z ist, welche für $s = 0$ und $z = 0$ verschwindet.

Zum Beweise stellen wir zunächst in der üblichen Weise fest, daß sich eine positive Zahl r und zwei weitere $\sigma_1 < \sigma_2$ finden lassen, so daß in

$$(2) \qquad f(s, z) = s^n \left(1 - \frac{c_1(z)}{s} - \frac{c_2(z)}{s^2} - \cdots - \frac{c_n(z)}{s^n} - s\,k(s, z)\right) = s^n (1 - \psi(s, z))$$

$|\psi(s, z)| < 1$, wenn $|z| \leqq r$ und $\sigma_1 \leqq |s| \leqq \sigma_2$ genommen werden.

Für den Logarithmus hat man dann

$$(3) \qquad \lg f(s, z) = n \lg s + \lg(1 - \psi(s, z)) = n \lg s - \sum_1^\infty \frac{\psi(s, z)^k}{k}$$

und kann nun innerhalb des bezeichneten Bereiches die Summe nach ganzen positiven und negativen Potenzen von s entwickeln mit Koeffizienten, welche gewöhnliche Potenzreihen nach z sind, etwa in der Gestalt:

$$(4) \qquad \lg f(s, z) = n \lg s - \sum_{-\infty}^{+\infty} g_h(z) s^h .$$

Hierin müssen sämtliche $g_h(z)$ mit negativem Index verschwinden für $z = 0$, weil jedes ihrer Glieder mindestens einen der Faktoren $c_1(z), c_2(z), \ldots, c_n(z)$ enthalten muß.

Spalten wir nun die Summe in zwei Teile, von denen der eine nur die Glieder mit negativen Potenzen, der andere alle übrigen enthält, setzen also

$$(5) \qquad \lg f(s, z) = n \lg s - \sum_1^\infty A_k(z) s^{-k} - \sum_0^\infty B_h(z) s^h = n \lg s - A\left(\frac{1}{s}, z\right) - B(s, z),$$

und gehen von den Logarithmen zu den Funktionen selbst zurück, so können wir schreiben

$$(6) \qquad f(s, z)\, e^{B(s,z)} = s^n e^{-A\left(\frac{1}{s}, z\right)} = R(s, z)$$

Als Funktion von s betrachtet ist nun die rechte Seite regulär für jedes $|z| \leqq r$ und jedes $|s| \geqq \sigma_1$, die linke Seite dagegen für jedes $|z| \leqq r$ und jedes $s \leqq \sigma_2$; daher ist der gemeinsame Wert $R(s, z)$ für $|z| \leqq r$ überhaupt eine für alle endlichen s reguläre Funktion von s, welche im Unendlichen einen Pol n-ter Ordnung hat, also eine ganz rationale Funktion n-ten Grades von s. Diese hat n Nullstellen. Da aber $A\left(\frac{1}{s}, z\right)$ für $|s| \geqq \sigma_1$ konvergiert, so können diese n Nullstellen nur innerhalb des Kreises $|s| < \sigma_1$ liegen[1]). Da ferner die Koeffizienten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ für $z = 0$ sämtlich verschwinden, so verschwinden dafür auch die Koeffizienten von $s^0, s^1, \ldots, s^n$ in $R(s, z)$, und es besteht in der Tat die in (1) angegebene Identität. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

II.

Es hat keine Schwierigkeit, nun auch für die Koeffizienten der Entwicklung in (4) explizite Formeln aufzustellen, wenn man beachtet, daß in dem genannten Bereich bei festem s die linke Seite eine reguläre Funktion von z ist. Man hat daher

$$(7) \qquad \lg f(s, z) = \lg f(s, 0) + \sum_1^\infty \frac{z^k}{k!} \left(\frac{\partial^k \lg f(s, z)}{\partial z^k}\right)_{z=0}.$$

Nun ist aber augenscheinlich $s^{nk} \left(\frac{\partial^k \lg f(s, z)}{\partial z^k}\right)_{z=0}$ für $k \geqq 1$ und $s = 0$ regulär, und damit folgt:

---

[1]) Ein ähnlicher Schluß bei *F. Hartogs*, Sitzungsberichte München v. 9. Januar 1909.

$$(8)\qquad \left(\frac{\partial^k \lg f(s,z)}{\partial z^k}\right)_{z=0} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{s^{-nk+h}}{h!}\left(\frac{\partial^h}{\partial s^h}\left(s^{nk}\,\frac{\partial^k \lg f(s,z)}{\partial z^k}\right)_{z=0}\right)_{s=0}.$$

Trägt man dies in (7) ein und ordnet nach Potenzen von s, so erhält man

$$(9)\qquad \lg f(s,z) = \lg j(s,o) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} s^m \sum_{m+nk\geqq 0,\ k\geqq 1}^{\infty} \frac{z^k}{k!\,(m+nk)!}\left(\frac{\partial^{m+nk} s^{nk}}{\partial s^{m+nk}}\left(\frac{\partial^k \lg f(s,z)}{\partial z^k}\right)_{z=0}\right)_{s=0}.$$

Es erübrigt sich, die Glieder, welche von $\lg f(s,0)$ herrühren und außer $n \lg s$ nur ganze positive Potenzen von s liefern, noch eigens hinzuschreiben. Dabei sind aber von besonderem Interesse die Koeffizienten von $s^{-1}, s^{-2}, \cdots, s^{-n}$, welche entsprechend dem obigen mit $-g_{-1}(z), -g_{-2}(z), \cdots, -g_{-n}(z)$ bezeichnet werden sollen. Durch Vergleich mit (6) folgt nämlich

$$(10)\qquad \lg R(s,z) = n \lg s - A\left(\frac{1}{s}, z\right) = n \lg s - \sum_{\mu=1}^{\infty} g_{-\mu}(z)\, s^{-\mu},$$

und wenn $R(s,z)$ in seine Wurzelfaktoren zerlegt wird:

$$R(s,z) = (s - s_1(z))\,(s - s_2(z)) \cdots (s - s_n(z)),$$

so ergibt sich in bekannter Weise

$$(11)\qquad g_{-\mu}(z) = \frac{1}{\mu} \sum_{a=1}^{n} s_a^{\mu}(z).$$

Hieraus aber lassen sich nach den *Newton*'schen Formeln die elementarsymmetrischen Funktionen und damit die Koeffizienten von $R(s,z)$ berechnen, und zwar bedarf es dazu nur der ersten n Funktionen $g_{-\mu}(z)$.

Wenn man will, kann man $R(s,z)$ auch als Determinante schreiben und findet ohne Mühe:

$$(12)\qquad R(s,z) = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\begin{vmatrix} s^n, & s^{n-1}, & s^{n-2}, \ldots, & s, & 1 \\ n g_{-n}, & (n-1) g_{-n+1}, & \ldots\ldots\ldots, & n, & 0 \\ (n-1) g_{-n+1}, & (n-2) g_{-n+2}, & \ldots\ n-1, & 0, & 0 \\ \vdots & & & & \\ g_1, & 1, & 0,\ 0, \ldots\ldots, & & 0 \end{vmatrix}.$$

Hiermit sind also, da die $g_{-\mu}(z)$ durch die unendlichen Reihen in (9) explizite dargestellt sind, auch $R(s,z)$ und damit die $b_\nu(z)$ in (1) explizite dargestellt.

Die Potenzreihe $B(s,z)$ in (5) ist zwar auch explizite bekannt, und damit auch $e^{B(s,z)}$. Da jedoch diese letztere Funktion in der Umgebung der Nullstelle nicht verschwindet, so genügt die Kenntnis von $B(s,z)$.

Man sieht auch sofort, daß die n Reihen $g_{-1}, g_{-2}, g_{-3}, g_{-4}, \ldots, g_{-n}$ voneinander unabhängig sind, so daß man also nicht mit weniger als den angegebenen unendlichen Reihen auskommen kann. Natürlich lassen sich aber die Koeffizienten von $e^{B(s,z)}$ aus denen von $R(s,z)$ und $f(s,z)$ durch mechanische Division oder Rekursionsformeln, also rational ermitteln.

III.

Um nun die Konvergenzverhältnisse genauer zu untersuchen, bemerken wir zuerst, daß man ohne Verlust an Allgemeinheit annehmen kann $f(s, 0) = s^n$, denn sonst hätte man nur den Quotienten $f(s, z) : a(s)$ zu betrachten, der in einem gewissen Gebiet ja ebenfalls regulär ist.

Es werde also jetzt angenommen, $f(s, z)$ sei regulär und absolut kleiner als M in einem Gebiet $|s| \leqq 1$, $|z| \leqq 1$ und außerdem $f(s, 0) = s^n$. Dabei ist notwendig $M \geqq 1$.

Es hat dann $f(s, z)$ die Form:

$$f(s, z) = s^n - z\mathfrak{P}(s, z).$$

Nun erkennt man sofort, daß die Funktion

$$F(S, Z) = S^n - \frac{MZ}{(1 - S)(1 - Z)} \tag{13}$$

als Majorante für die Entwicklung von $\lg f(s, z)$ benutzt werden kann, denn die in (3) auftretende Funktion $\psi(s, z)$ wird dann

$$\mathfrak{P}(S, Z) = \frac{MZ}{S^n(1 - S)(1 - Z)}. \tag{14}$$

Daraus ergibt sich, daß die bei der Entwicklung von $f(s, z)$ auftretenden Reihen mindestens in demselben Umfang absolut konvergieren, in welchem die analogen Reihen für $F(S, Z)$ absolut konvergieren.

Schreiben wir nun

$$F(S, Z) = \frac{1}{1 - S}\left(S^n(1 - S) - \frac{MZ}{1 - Z}\right) \tag{15}$$

so hat der zweite Faktor gleich Null gesetzt, n Wurzeln $S_1(Z), S_2(Z), \ldots, S_n(Z)$, welche sich für $Z = 0$ auf Null reduzieren, und eine, $S_{n+1}(Z)$, welche für $Z = 0$ gleich 1 wird.

Setzt man

$$U = \frac{MZ}{1 - Z}, \qquad Z = \frac{U}{U + M} \tag{16}$$

so erhält man aus der bekannten *Bürmann*'schen Reihe[1]), wenn man sie auf

$$S(1 - S)^{\frac{1}{n}} = U^{\frac{1}{n}}$$

anwendet:

$$S_1(Z) = U^{\frac{1}{n}} + \sum_2^\infty \frac{1}{m!}\left(\frac{d^{m-1}}{dS^{m-1}}(1 - S)^{-\frac{m}{n}}\right) \cdot \left(U^{\frac{1}{n}}\right)^m \tag{17}$$

oder ausgerechnet

$$S_1(Z) = U^{\frac{1}{n}} + \sum_2^\infty \frac{m(m + n)(m + 2n) \cdots (m + n(m - 2))}{n!\, n^{m-1}}\left(U^{\frac{1}{n}}\right)^m, \tag{18}$$

und die übrigen Werte S_α entstehen dadurch, daß man der n-ten Wurzel auf der rechten Seite ihre n Werte beilegt.

[1]) Diese kann auch leicht aus II, als Spezialfall hergeleitet werden.

Ersetzt man nun U durch seinen Wert aus (16), so erkennt man, daß auch die Entwicklung nach Potenzen von $Z^{\frac{1}{n}}$ lauter positive Koeffizienten hat. Der Konvergenzbereich dieser Reihe reicht nach allgemeinen Sätzen bis zum nächsten Verzweigungspunkt, das ist also bis $S_0 = \frac{n}{n+1}$, $Z_0 = \frac{n^n}{n^n + (n+1)^{n+1} M} < 1$.

Hieraus folgt unmittelbar für $|Z| \leqq \frac{n^n}{n^n + M(n+1)^{n+1}}$:

$$|S_a(Z)| \leqq S_1(|z|), \tag{19}$$

wenn mit $S_1(Z)$ diejenige Entwicklung bezeichnet wird, in welcher die Potenz $Z^{\frac{1}{n}}$ den Hauptwert hat.

Da ferner die $S_a(Z)$ auch noch für den Verzweigungspunkt endlich bleiben, so konvergieren die Entwicklungen auch noch für diesen, und es ist

$$\frac{n}{n+1} = S_1(Z_0). \tag{20}$$

Außer diesen n Lösungen hat aber die Gleichung $F(S, Z) = 0$ noch eine weitere $S_{n+1}(Z)$, welche für $Z = 0$ gleich 1 wird.

Setzt man daher $1 - S = \sigma$ und schreibt die Gleichung

$$U = \sigma(1-\sigma)^n, \tag{21}$$

so erhält man die Entwicklung

$$1 - S_{n+1}(Z) = \sigma = U + \sum_2^\infty \frac{1}{m!} \left(\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} (1-\sigma)^{-mn} \right)_{\sigma=0} \cdot U^m \tag{22}$$

oder ausgerechnet

$$S_{n+1}(Z) = 1 - U - \sum_2^\infty \frac{mn(mn+1)\cdots(mn+m-2)}{m!} U^m, \tag{23}$$

wo nun wieder alle Koeffizienten negativ sind, eine Eigenschaft, die auch bei der Umrechnung in eine Potenzreihe von Z erhalten bleibt. Die Konvergenz von (23) reicht wieder bis $|Z| = Z_0$. Somit gilt hier die Ungleichung

$$|S_{n+1}(Z)| \geqq S_{n+1}(|Z|) \text{ für } |Z| \leqq Z_0 \tag{24}$$

und für $Z = Z_0$ die Gleichung

$$S_{n+1}(Z_0) = S_1(Z_0) = \frac{n}{n+1}. \tag{25}$$

Wenn man will, kann man die Angaben über die Konvergenz auch direkt bestätigen, wenn man in (18) und (22) die Koeffizienten durch Gammafunktionen ausdrückt und auf diese die *Stirling*'sche Formel anwendet.

Daß die Koeffizienten in den Entwicklungen von $S_1(Z)$ und $1 - S_{n+1}(Z)$ sämtlich positiv sind, leuchtet auch unmittelbar ein, wenn man die Gleichung schreibt:

$$S = M^{\frac{1}{n}} Z^{\frac{1}{n}} (1-Z)^{-\frac{1}{n}} (1-S)^{-\frac{1}{n}} \tag{26}$$

und

$$\sigma = MZ(1-\sigma)^{-n}(1-Z)^{-1}, \tag{27}$$

weil dann auf der rechten Seite alle Entwicklungskoeffizienten ersichtlich positiv sind und darum auch die Differentialquotienten von S und σ nach Z für $Z = 0$ positiv sind.

Es ist ferner deutlich, daß im Verzweigungspunkt gerade diejenigen Zweige einander gleich werden, welche für positive reelle Z die reellen Lösungen der Gleichung $F(S, Z) = 0$ liefern, da ja die komplexen Lösungen ersichtlich alle verschieden sind.

IV.

Hieraus ergibt sich nun der Konvergenzbereich der Entwicklung von $\lg F(S, Z)$ aus

$$(29) \qquad \lg F(S, Z) = n \lg S + \lg\left(1 - \frac{S_1}{S}\right)\left(1 - \frac{S_2}{S}\right) \cdots \left(1 - \frac{S_n}{S}\right) + \lg S_{n+1} + \lg\left(1 - \frac{S}{S_{n+1}}\right) - \lg (1 - S)$$

ohne weiteres wie folgt:

Die Reihe mit negativen Potenzen von S konvergiert für

$$|Z| < \varrho < \frac{n^n}{n^n + (n+1)^{n+1} M} = Z_0$$
$$|S| > S_1(\varrho),$$

die Reihe mit positiven Potenzen aber für

$$|Z| < \varrho < Z_0, \qquad |S| < S_{n+1}(\varrho).$$

Dabei sind $S_1(\varrho)$ und $S_{n+1}(\varrho)$ schon von selbst kleiner als 1.

Man hat also schließlich den Satz:

Ist $f(s, z)$ regulär für $|s| \leqq 1$, $|z| \leqq 1$ und $|f(s, z)| \leqq M$, ferner $f(s, 0) = s^n$, so konvergiert die Entwicklung

$$(A) \qquad \lg f(s, z) = n \lg s - \sum_1^\infty A_\nu(z) s^{-\nu} - \sum_0^\infty B_\mu(z) s^\mu$$

sicher für ein Gebiet

$$|z| < \varrho < \frac{n^n}{n^n + (n+1)^{n+1} M} = Z_0, \qquad S_1(\varrho) < |s| < S_{n+1}(\varrho),$$

wo $S_1(\varrho)$, $S_{n+1}(\varrho)$ die oben näher beschriebenen Funktionen von ϱ und M sind, nämlich die beiden positiven reellen Wurzeln der Gleichung

$$S^n(1 - S) = \frac{M\varrho}{1 - \varrho}.$$

Das beschriebene Konvergenzgebiet wird auch bei der Majorante wirklich erreicht, und ist daher das größte, welches unter diesen Voraussetzungen allgemein angegeben werden kann.

Für die Zerlegung von $f(s, z)$ in zwei Faktoren wie in (1) ergibt sich aber folgendes:

Bezeichnet man die beiden in (A) auftretenden Reihen wie in (5) mit A und B, für die Majorante aber mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so ist

$$(30) \qquad -\mathfrak{A} = \lg\left(1-\frac{S_1}{S}\right)\left(1-\frac{S_2}{S}\right)\cdots\left(1-\frac{S_n}{S}\right)$$

$$-\mathfrak{B} = \lg\left(\frac{S_{n+1}-S}{1-S}\right).$$

Es sind daher für e^{-A} und e^{-B} beziehungsweise Majoranten $e^{\mathfrak{A}}$ und $e^{\mathfrak{B}}$, weil durch den Zeichenwechsel im Exponenten sämtliche Koeffizienten jetzt positiv werden. Damit sind jetzt für die beiden Faktoren Majoranten beziehungsweise

$$\frac{S^n}{(S-S_1)(S-S_2)\cdots(S-S_n)} \quad \text{und} \quad \frac{1-S}{S_{n+1}-S}.$$

Die in diesen Entwicklungen auftretenden Koeffizienten sind nach ihrer Herleitung sämtlich positiv, was man auch direkt leicht bestätigt. Man hat daher Konvergenz zunächst unter denselben Bedingungen wie oben. Da aber e^{-A} in bezug auf s nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthält, so entfällt die untere Schranke für $|s|$ und *man hat sicher Konvergenz beider Entwicklungen in dem Gebiet*

$$|z| < \varrho < \frac{n^n}{n^n + (n+1)^{n+1} M}$$

$$|s| < S_{n+1}(\varrho).$$

Da aber $S_{n+1}(\varrho) > \frac{n}{n+1}$ *ist, so gehört der Kreis* $|s| < \frac{n}{n+1}$ *für jedes* $\varrho < Z_0$ *dem Konvergenzgebiete beider Faktoren an.*

Da ferner für die Majorante diese Grenzen die wahren Grenzen des Konvergenzbereiches sind, so können bessere Angaben unter diesen Voraussetzungen nicht gemacht werden.

V.

Das obige Ergebnis ist deshalb bemerkenswert, weil sich dabei für s ein Gebiet ergibt, welches für alle zulässigen ϱ dem Konvergenzgebiet angehört, unabhängig von M. Aber es bedarf auch keiner neuen Untersuchung um den allgemeineren Fall, wo $f(s, z)$ nur den Voraussetzungen von I. unterliegt, zu erledigen.

In der Tat, ist $f(s, z)$ regulär und

$$f(s, 0) = s^n + a_1 s^{n+1} + \cdots = s^n a(z)$$

für $s \leq 1$ und $z \leq 1$ und in diesem Gebiet absolut kleiner als M, so kann man als Majorante verwenden

$$\Phi(S, Z) = S^n - \frac{M S^{n+1}}{1-S} - \frac{M Z}{(1-Z)(1-S)},$$

was man auch schreiben kann:

$$\Phi(S, Z) = \frac{1}{(1-S)}\left(S^n(1-(M+1)S) - \frac{M Z}{1-Z}\right).$$

Setzt man hier $(M+1)S = \Sigma$, so kommt

$$\Phi(S, Z) = \frac{1}{(1-S)(M+1)^n}\left(\Sigma^n(1-\Sigma) - \frac{M(M+1)^n Z}{1-Z}\right),$$

und man sieht, daß man die obigen Ergebnisse übertragen kann, wenn man nur M durch $M(M+1)^n$ ersetzt und die Schranken für $|s|$ durch $M+1$ dividiert.

Man hat also den Satz:

Unter den zuletzt gemachten Voraussetzungen konvergieren die beiden Faktoren der Zerlegung in dem Gebiet

$$|z| < \varrho < \frac{n^n}{n^n + M(M+1)^n(n+1)^{n+1}}, \qquad |s| < \frac{\Sigma_{n+1}(\varrho)}{M+1},$$

und der Kreis $|s| < \dfrac{n}{(n+1)(M+1)}$ *gehört für jedes zulässige z immer dem Konvergenzgebiet an.*

Dabei ist unter $\Sigma_{n+1}(\varrho)$ die größere der beiden zwischen Null und Eins gelegenen reellen Wurzeln der Gleichung

$$\Sigma^n(1-\Sigma) = \frac{M(M+1)^n\varrho}{1-\varrho}$$

zu verstehen.

VI.

Es erübrigen noch wenige Bemerkungen für den Fall von mehr Veränderlichen $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$. Die Überlegungen von I. übertragen sich ungeändert, die von II. über die formale Darstellung können in der Weise erweitert werden, daß man für z_α setzt tz_α und nun die Entwicklung nach t durchführt, am Schlusse aber $t=1$ setzt. Auch die Konvergenzbetrachtung verläuft ganz analog, wenn man in $F(S, Z)$ unter Z die Summe von m Größen Z_α versteht. Man hat dann in der obigen Bedingung nur $|z|$ durch $|z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_m|$ zu ersetzen. Aber es muß hier dahingestellt bleiben, ob damit wirklich die beste Grenze erhalten wird. Wie der Fall $f(s, 0, 0, 0, \ldots) = 0$ auf den hier behandelten zurückzuführen ist, hat schon *Weierstrass* gezeigt.